No. 15 (53). — Real-Schule I. Ordnung zu St. Johann. — Danzig.

Ostern 1874.

Zu der

Freitag, den 27. März, Vor- und Nachmittags

stattfindenden

öffentlichen Prüfung der Schüler

und

Entlassung der Abiturienten

ladet

im Namen des Lehrer-Collegiums

ganz ergebenst ein

Dr. E. Panten,

Director.

Inhalt.

Danzig.
Wedel'sche Hofbuchdruckerei.
1874.

I. Lehrverfassung.

Dieselbe war in den durchgenommenen Pensen derjenigen der Vorjahre gleich; wegen der beträchtlichen Druckkosten der diesjährigen wissenschaftlichen Abhandlung muß diesmal der specielle Bericht ausfallen.

Als Lehrmittel werden von den Schülern gebraucht:

In **Prima:** Hollenberg, Hilfsbuch für den evangelischen Religionsunterricht. — Hopf und Paulsieck. Deutsches Lesebuch II. 2. Abth. — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. — Vergil Aeneis. — Plötz Manuel. Plötz, Nouvelle Grammaire française. Plötz Uebungen zur franz. Syntax. — — Macaulay History of England I. Plate Engl. Gramm. II. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Physik von Koppe. — Mehler's Elementarmathematik, Gandtner Analytische Geometrie, Lieber & Lühmann Geometrische Aufgaben, Gauß Logarithmentafeln.

In **Secunda:** Hollenberg, Hilfsbuch für den evangelischen Religionsunterricht. — Hopf und Paulsieck, Deutsches Lesebuch II. 2. Abth. — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. — Caesar bell. Gall., Curtius, Ovid. Metam. ed. Siebelis. — Plötz, Schulgrammatik. — Plötz Manuel (O.-II.) Michaud, Première Croisade ed. Goebel (für U.-II.) — Plate, Engl. Gramm. II. — Schütz Charakterbilder. Herrig, First English Reading-Book (für U.-II.). — Voigt, Grundriß der alten Geschichte. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Physik von Koppe. — Mehler's Elementarmathematik, Lieber & Lühmann Geometrische Aufgaben. — Gauß Tafeln.

In **Tertia:** Hopf und Paulsieck, Deutsches Lesebuch II. 1. Abth. — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. Desselben Uebungen zur Lateinischen Grammatik für mittlere Klassen. Caesar de bello Gallico. Phaedrus ed. Raschig. — Plötz Schulgrammatik. — Plötz, Lectures choisies. — Plate, Engl. Gramm. I. Scott, Tales of a Grandfather. — Voigt, Grundriß der Brandenburg-Preuß. Geschichte. — Geschichtstabellen von Dr. Hirsch. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Leunis, Leitfaden für Naturgeschichte III. — Mehler's Elementarmathematik. Harms Arithmetische Aufgaben.

In **Quarta:** Preuß, biblische Geschichten. — Hopf und Paulsieck, Deutsches Lesebuch I. 3. Abth. — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. — Weller's Herodot. Cornel. Nepos. Phaedrus ed. Raschig. — Plötz, Elementargrammatik. — O. Jäger, Hilfsbuch für den ersten Unterricht in der alten Geschichte. Geschichtstabellen von Dr. Hirsch, Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Leunis, Leitfaden für Naturgeschichte II. — Mehler's Elementarmathematik. Rechenbuch von Harms und Kuckuck. Arithmetische Aufgaben von Harms.

In **Quinta:** Preuß, biblische Geschichten. — Hopf und Paulsieck, Deutsches Lesebuch I. 2. Abth. — Scheele, Vorschule zu den lateinischen Klassikern. — Plötz, Elementargrammatik I. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Geschichtstabellen von Dr. Hirsch. — Leunis, Leitfaden für Naturgeschichte I. II. — Rechenbuch von Harms und Kuckuck.

In **Sexta:** Preuß, biblische Geschichten. — Hopf und Paulsieck, Deutsches Lesebuch I. 1. Abth. — Scheele, Vorschule zu den lateinischen Klassikern. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Rechenbuch von Harms und Kuckuck.

In der **Vorschule:** Preuß, biblische Geschichten. — Clemen, Deutsches Lesebuch. Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte.

Für den **Gesangunterricht:** Die Choralmelodien, herausgegeben bei Gröning. — Erk und Graef, Liederkranz I. Theil in VI. und 2. Singabtheilung. — Peter Stein, Auswahl von Gesängen für gemischten Chor 1. Heft für die erste Singabtheilung.

Wir bitten dringend, bei Neubeschaffung der Lehrbücher jedesmal die neueste Auflage derselben zu wählen.

II. Verordnungen der Behörden.

1. Jan. 23. 1873. — Pr.=Sch.=C. 16. Jan.: Jeder Lehrer hat bei jeder schriftlichen Arbeit auf gute und reinliche Handschrift zu halten.
2. Febr. 2. 1874. — Pr.=Sch.=C. 27. Jan.: Bei der Aufnahme von Schülern, die über 12 Jahre alt sind, ist der Nachweis der Revaccination zu fordern.
3. März 5. — Min.=Rescr. 11. Febr. Pr.=Sch.-C. 26. Febr.: Die Theilnahme an dem eine Zeitschrift: Walhalla, herausgebenden Gymnasiasten=Verein ist untersagt, gegen solche, welche dem Verbot zuwiderhandeln, strenge zu verfahren.

III. Chronik.

Auch dies Jahr ist nicht ohne erheblichen Wechsel im Lehrer=Collegium vorübergegangen. Zu Ostern verließ der wissenschaftliche Hilfslehrer Herr M. Boeck nach dreijähriger erfolgreicher Thätigkeit unsere Anstalt, um einem Rufe nach Bremerhafen zu folgen; für denselben trat, nachdem der erwählte Nachfolger unmittelbar vor dem Beginne des Schuljahres abgelehnt hatte, Herr Dr. O. Völkel in eine etatsmäßige Hilfslehrerstelle ein.

Herr Professor Gronau, der bereits Ende Februar erkrankt war, konnte auch nach den Osterferien seine Lehrthätigkeit nicht wieder aufnehmen. Der hochlöbl. Patron bewilligte dem alten hochverdienten Lehrer einen halbjährigen Urlaub mit vollem Gehalte und erwirkte bei den Herren Stadtverordneten eine außerordentliche Remuneration für einen stellvertretenden Hilfslehrer. Jedoch schon im Anfange des Sommers sah Herr Prof. Gronau durch seinen Gesundheitszustand sich genöthigt, seine Pensionierung zu beantragen. So schied denn zum 1. October 1873 der älteste College, dessen Verdiensten sowol die städtischen Behörden als auch das Königl. Provinzial=Schul=Collegium in ehrenvollster Weise ihre Anerkennung zu Theil werden ließen, aus unserer Mitte. Seit 1830 hat er die ganze Entwickelung unserer Anstalt von einer niederen Bürgerschule bis zu einer Realschule I. Ordnung mit erlebt und an derselben mit äußerster Gewissenhaftigkeit, liebevoller Theilnahme und segensreichem Erfolge mitgewirkt; seinen Fachgenossen durch gelehrte Arbeiten wohlbekannt, den Collegen stets ein freundlicher, gerne vermittelnder Genosse, allen Schülern mit gleicher liebevoller Theilnahme zugethan, hat er sich durch seinen reinen, edlen Sinn, seine innige Frömmigkeit unser aller höchste Achtung und Liebe erworben. Möchten seine Kräfte soweit wiederkehren, um ihn seine Muße nach seinem Sinne genießen zu lassen!

Nach der Bestimmung des hochlöbl. Patrons, der die hohen Schul=Behörden ihre Genehmigung ertheilt hatten, fand demzufolge mit dem 1. October diejenige Ordnung des Lehrer=Collegiums statt, welche in Tab. VII. verzeichnet worden ist; gleichzeitig wurde der bis dahin an der Realschule zu Elbing beschäftigte Schulamts=Candidat Herr P. v. Schaewen als wissenschaftlicher Hilfslehrer berufen.

Dem nunmehrigen 1. Oberlehrer Herrn Dr. Bail ist in Anerkennung seiner Verdienste als Gelehrter und Lehrer durch Patent vom 7. Novbr. der Professortitel zu Theil geworden.

Das Lehramt für den katholischen Religions=Unterricht legte Herr Pfarrer Stengert zu Ostern 1873 nieder; bis jetzt hat dasselbe noch nicht wieder besetzt werden können.

Durch Erkrankungen der Lehrer erlitt der Unterricht leider auch in diesem Jahre mehrfache Hemmung. Herr Dr. Claaß mußte zur Wiederherstellung seiner Gesundheit für die drei den Sommerferien vorhergehenden Wochen beurlaubt werden und ich selbst wurde durch schmerzhafte Krankheit genöthigt, noch sechs Wochen nach den Sommerferien jeder unmittelbaren Thätigkeit für die Schule zu entsagen.

Von unseren Schülern sind zwei liebe, hoffnungsvolle Knaben gestorben, der Elementarschüler Gustav v. Steen am 26. Sptbr. 1873 in Folge eines unglücklichen Sprunges vom Waggon der Pferde=Eisenbahn, und der Quartaner Oscar Balke am 5. März 1874 am Herzschlage.

Die Ferien fielen in dem abgelaufenen Schuljahre in die gesetzlich vorgeschriebene Zeit; einzelne Ferientage waren der Fronleichnams-, Johannis-, Martins- und Fastnachtstag, außerdem der 2. September, an welchem auch unsere Anstalt das deutsche Nationalfest feierlich beging.

Mit dem 16. October 1873 begann unsere Anstalt ihr 26stes Jahr als eine höhere Lehranstalt. Da ich selbst an demselben Tage vor 25 Jahren als ordentlicher Lehrer an der Schule eingetreten war, hatten die Collegen und Schüler die Morgenandacht zu einer besonders festlichen gestaltet; die Beweise herzlichster Theilnahme und der natürlich gegebene Rückblick auf die erfreuliche Entwickelung der Anstalt schufen eine erhebende Schulfeier. Am 16. October 1848 wurde die Schule mit 218 Schülern in 7 Klassen (incl. der Vorschule) eröffnet; zu diesen sind in den 25 Jahren 3040 Schüler neu inscribiert worden; am 16. October 1873 waren in 11 Realschulklassen 423, in der Elementarklasse 55, zusammen 478 Schüler; Abiturienten sind von Mich. 1849 bis Ostern 1859 incl. 24 (jährl. Durchschnitt 2,4), von Ostern 1860 bis Ostern 1873: 98 (jährl. Durchschnitt 7,0), zusammen 122 entlassen worden.

IV. Vermehrung der Lehrmittel.

Für die Schulbibliothek sind außer den Fortsetzungen früher genannter Werke eine Anzahl neuer und über 30 mathematische aus der Bibliothek des Herrn Prof. Gronau angekauft worden.

An Geschenken erhielt die Schule von den Herren Verfassern oder Verlegern verschiedene Grammatiken, Leitfäden, Hilfsbücher ꝛc.

Für den Unterricht in den Naturwissenschaften wurden angeschafft: 13 anatomische Präparate von Steger in Leipzig, 29 ausgestopfte Vögel, verschiedene Ergänzungen des physikalischen und des chemischen Cabinets.

Für den Unterricht im Schreiben, Zeichnen und in der Geographie sind die vorhandenen Mittel zum Theil erneuert und erweitert worden.

V. Schülerzahl.

Die Zahl der Schüler betrug am Schlusse des vorigen Schuljahres vor Ostern 1873 432 in der Realschule, 53 in der Vorschul-Klasse, also 485 in der ganzen Anstalt. Am Schlusse der je dritten Woche vom Anfange des Semesters waren:

	I.	O. II.	U. II.	IIIa.	IIIb.	IVa.	IVb.	Va.	Vb.	VIa.	VIb.	Summa	E.	Summa.
im Sommer:	29	18	45	37	38	36	35	54	52	58	49	**451**	**47**	**498.**
im Winter:	28	15	35	33	35	35	36	50	50	57	48	**422**	**55**	**477.**
sind jetzt:	26	13	33	31	34	34	36	48	50	54	47	**406**	**55**	**461.**

Davon waren:	Evangel.	Kathol.	Israel.	—	Einheimische.	Auswärtige.
im Sommer:	452	20	26	—	409	89.
im Winter:	432	21	24	—	393	84.

VI. Die Abiturienten-Prüfung.

Am 5. März c. hat unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Schrader und in Gegenwart des Herrn Stadt-Schulraths Dr. Cosack als Patronatscommissars die Oster-Prüfung stattgefunden.

Zu ihren **schriftlichen** Arbeiten haben die Abiturienten folgende Themata erhalten:

im **Deutschen:** Dem Menschen bring' ich nur die That in Rechnung,
Wozu ihn ruhig der Character treibt;
Denn blinder Mißverständnisse Gewalt
Treibt oft den Besten aus dem rechten Gleise.

im **Französischen:** Quelle est l'influence, qu'ont exercée la renaissance des lettres et les découvertes maritimes?

im **Englischen:** Ein Exercitium: Election of the Emperor 1619. (Nach Ranke).

in der **Mathematik:**

Geometrie: Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben die Differenz der Winkel an der Grundlinie, die zugehörige Schwerlinie und die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Höhen mit dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.

Trigonometrie: Wie hoch steht am 15. Octbr. 1873 um 4 Uhr Nm. der Saturn über dem Horizonte von Danzig, wenn sein Stundenwinkel um diese Zeit $21^h\ 43^m\ 18^s$ ist? — Polhöhe von Danzig $\varphi = 54^0\ 21'\ 18''$, Declination des Saturn $\delta = -21^0\ 18'\ 40''$.

Stereometrie: Durch die Grundkante einer graden Pyramide mit quadratischer Basis soll unter dem Winkel φ gegen die Basis ein Schnitt gelegt und der Inhalt dieses Schnittes berechnet werden. Basiskante $a = 2$m., Höhe $h = 3$m., $\varphi = 13^0\ 24'$.

Algebra. Sämmtliche Wurzeln von $x^5 = 28$ zu berechnen, die reelle durch Reihenentwickelung.

in den **Naturwissenschaften:**

Physik: 1. Drei Arbeiter ziehen an den Enden dreier Seile, welche an einem Punkte einer auf einem horizontalen Boden liegenden Last befestigt sind, jeder mit 50 Kgr. Kraft. Die Neigungswinkel dieser Kräfte gegen den Horizont sind 10^0, 20^0, 30^0 und die Horizontalwinkel zwischen der ersten und zweiten Kraft $= 20^0$, und zwischen der ersten und dritten $= 35^0$. — a. Welches ist die Größe und Richtung der Resultierenden? b. Mit welcher Kraft und in welcher Richtung wird die Last horizontal bewegt? — Es wird als geringste genügende Leistung ein klarer Plan der ganzen Lösung und die Ausrechnung des Theiles b der Aufgabe verlangt.

2. Es sollen die Temperaturen ermittelt und in Celsius-Graden ausgedrückt werden, bei denen die Thermometer nach Fahrenheit und Reyger ein und dieselbe Zahl anzeigen.

Chemie: Es wurde 1 gr. gereinigte Pottasche in Wasser gelöst und mit 33,4 CC einer Oxalsäure versetzt, welche 10 gr. in 300 CC enthielt und von der 10 CC 2,625 CC Kalilauge sättigen. Von letzterer wurden rückwärts 2,2 CC bis zur Neutralisation gebraucht. Wieviel kohlensaures Kali ist in der Pottasche enthalten?

Mit dem Zeugnisse der Reife werden entlassen:

1. Karl Penner, $19^3/_4$ J. alt, $1^1/_2$ J. auf der Schule, 2 J. in I, Sohn eines Kaufmanns hieselbst, will neuere Sprachen studieren.
2. Ernst Radewald, $19^1/_2$ J. alt, 10 J. auf der Schule, 2 J. in I, Sohn eines Rentiers hieselbst, widmet sich dem Baufache.
3. Bruno Rathcke, $18^1/_2$ J. alt, $8^1/_2$ J. auf der Schule, 2 J. in I, Sohn eines Conditors hieselbst, widmet sich dem Baufache.
4. Waldemar Wendt, 21 J. alt, 14 J. auf der Schule, 2 J. in I, Sohn eines verstorbenen Hofbesitzers in Ohra, widmet sich dem Baufache.
5. Max Ziems, $19^1/_2$ J. alt, $11^1/_2$ J. auf der Schule, 2 J. in I, Sohn eines verstorbenen Pianofortefabrikanten, will neuere Sprachen studieren.

Durch den Beschluß der Prüfungscommission wurde dem Radewald das mündliche Examen erlassen, und erhielt er das Zeugnis der Reife mit dem Prädikate: gut, die übrigen mit dem Prädikate: genügend bestanden.

VII. Vertheilung der Stunden unter die Lehrer.

(während des Winter-Semesters).

Lehrer.	Ordinarius.	Realschule. I.	O. II.	U. II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI. A.	VI. B.	Summa.	Vorschule.	Summa.
1. Dir. Dr. **E. Panten**	I.	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr. 2 Gesch.									12		
2. Oberl. Prof. Dr. **Bail**	O. II.	6 Naturwissensch.	6 Naturwissensch.	6 Naturwissensch.	2 Naturg.								20		
3. Oberl. **Koch**	U. II	3 Engl.	3 Engl. 4 Franz.	3 Engl. 4 Franz.		4 Engl.							21		
4. Oberl. **Lohmeyer**	IV. B				2 Gesch. 2 Geogr.	2 Gesch. 2 Geogr.		6 Latein 2 Geogr. 2 Gesch. 3 Deutsch					21		
5. Oberl. **Fincke**	III A	4 Franz.			4 Engl. 4 Franz.		5 Franz.		5 Franz.				22		
6. Oberl. Dr. **Brandt**	III B					5 Latein 4 Franz.		5 Franz.		5 Franz. 3 Gesch. Geogr.			22		
7. Ord. L. **Schmidt**	IV. A						6 Latein 3 Deutsch			6 Latein 4 Deutsch	3 Gesch. Geogr.		22		
8. Ord. L. **Schumann**		5 Math.		5 Math.	6 Math.			4 Math. 2 Naturg.					22		
9. Ord. L. **Weidemann**		3 Latein 3 Deutsch		4 Latein 3 Deutsch	5 Latein 3 Deutsch								21		
10. Ord. L. Dr. **Claaß**	V. A.					2 Religion	2 Religion	2 Religion	3 Religion 6 Latein	3 Religion	3 Religion	3 Religion	24		
11. Ord. L. **Schultze**	V. B.					2 Naturg.	2 Naturg.		2 Naturg.	2 Naturg. 4 Rechnen	2 Naturg. 5 Rechnen	2 Naturg. 5 Rechnen	26		
12. Pred. **Lange**		2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion								8		
13. Kath. Rel.-L. vacat		Katholische Religion in 3 Abtheilungen.											6		
14. Wissensch. Hilfslehr. Dr. **Giese**	VI. A		4 Latein 3 Deutsch						4 Deutsch 1 Gesch.		8 Latein 4 Deutsch		24		
15. Wissensch. Hilfslehr. **v. Schaewen**			5 Math.			6 Math.	6 Math.	2 Rechnen	4 Rechnen				23		
16. Wissensch. Hilfslehr. Dr. **O. Völkel**	VI. B					3 Deutsch	2 Gesch. 2 Geogr.		2 Geogr.			8 Latein 4 Deutsch 3 Gesch. Geogr.	24		
17. Zeichen- u. Schreibl. **Krahn**		3 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 3 Schreib.	2 Zeichnen 3 Schreib.	31		
18. Elementarl. **Hugen**	E.							2 Schreib.	2 Schreib.	2 Schreib.			6	2 Religion 8 Deutsch 6 Rechnen 2 Geogr. 6 Schreib. 2 Zeichnen	26
19. Gesangl. **Jankiewicz**		5 Singen in 3 Abtheilungen.									1 Singen.		6		

VIII. Ueberſicht der ſtatiſtiſchen Verhältniſſe der Realſchule zu St. Johann

im Schuljahr von Oſtern 1873 bis Oſtern 1874.

Mitte März 1874.

Lehrer.	Allgemeiner Lehrplan. Fächer.	Klaſſen und Stunden. I.	O. II.	U. II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI. A.	VI. B.	Summa.	E.	Verhältniſſe der Schüler in	waren am Schluſſe des Vorjahres	Anfang des Schuljahres	ſind	Abiturienten entlaſſen		widmen ſich	
Director Dr. **E. Panten**	Religion	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	26	2	I.	18	29	26	mit dem Zeug=		dem Baufache	3
1r Oberlehrer Profeſſor Dr. **Bail**	Deutſch	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	37	8	O. II.	27	18	13	niſſe der Reife	5	= Studium d.	
2r „ **Koch**	Latein	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	8	61	—	U. II.	32	45	33			neueren	
3r „ **Lohmeyer**	Franzöſiſch	4	4	4	4	4	5	5	5	5	—	—	40	—	III. A.	38	37	31			Sprachen	2
4r „ **Fincke**	Engliſch	3	3	3	4	4	—	—	—	—	—	—	17	—	III. B.	39	38	34				
1r Ord. Lehrer Oberl. Dr. **Brandt**	Geſchichte und Geographie	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	40	2	IV. A.	36	36	34				
2r „ „ **Schmidt**	Naturwiſſenſchaften	6	6	6	2	2	2	2	2	2	2	2	34	—	IV. B.	37	35	36				
3r „ „ **Schumann**	Mathematik u. Rechnen	5	5	5	6	6	6	6	4	4	5	5	57	6	V. A.	52	54	48				
4r „ „ **Weidemann**	Zeichnen	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	23	2	V. B.	50	52	50				
5r „ „ Dr. **Claaß**	Schreiben	—	—	—	—	—	2	2	2	2	3	3	14	6	VI. A.	56	58	54				
6r „ „ **Schultze**															VI. B.	47	49	47				
Prediger **Lange**	Summa...	33	33	33	32	32	32	32	31	31	30	30	349	26	Sa.	432	451	406		5		5
Wiſſenſch. Hilfslehrer Dr. **Gieſe**																						
„ „ **v. Schaewen**	Singen		—∞2—∞2—∞1—								1		6									
„ „ Dr. **O. Völkel**																						
Zeichen= u. Schreiblehrer **Krahn**																						
Elementarlehrer **Hugen**															Verſch.	53	47	55				
Geſanglehrer **Jankiewicz**																						
															Sa.	485	498	461				

Von dieſen Stunden fallen bei I. und II. 1 Zeichenſtunde, dann 5 Singſtunden außer der Schulzeit. Die combinierten Lectionen ſind nur einfach gezählt.

Das Zeichen ∞ bedeutet Combination.

IX. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Vormittags 8½ Uhr.

Choral und Gebet.

Quarta. A. Latein — Schmidt.
B. Mathematik — Schumann.

Tertia. A. Religion — Lange.
A. und B. Geographie — Lohmeyer.
B. Französisch — Dr. Brandt.

Unter-Secunda. Englisch — Koch
Deutsch — Weidemann.

Ober-Secunda. Latein — Dr. Giese.
Mathematik — v. Schaewen.

Prima. Französisch — Fincke.
Geschichte — der Director.
Chemie — Dr. Bail.

Entlassung der Abiturienten.

Schlußgesang.

Aus dem **Magnificat** von **Durante.**

Nachmittags 3 Uhr.

Vorschule. Deutsch, Rechnen — Hugen.

Sexta. A. Latein — Dr. Giese.
B. Geographie — Dr. O. Völkel.

Quinta. A. und B. Naturgeschichte — Schultze.
A. und B. Religion — Dr. Claaß.

Schlußgesang.

Probezeichnungen und Probeschriften der Schüler werden zur Ansicht im Zeichensaale ausgelegt sein.

Sonnabend, den 28. März, Censur und Versetzung; Schluß des Schuljahres.

X. Aufnahme neuer Schüler.

Der neue Unterrichtscursus beginnt Montag, den 13. April. Nach den Osterfeiertagen werde ich, zu der Zeit und unter den Beschränkungen, wie ich es durch öffentliche Anzeige bekannt machen werde, für die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler in meinem Geschäftszimmer im Schullocale bereit sein.

Ich ersuche die geehrten Eltern, welche ihre Söhne aus unserer Anstalt wollen abgehen lassen, mir die schriftliche Anzeige davon möglichst bald nach dem Schlusse des Schuljahres einzureichen.

Dr. Panten.

Die Rotation der Erde.

I.

Das Problem der Rotation eines Weltkörpers im Allgemeinen.

Die partielle Differentialgleichung, auf welche das Problem der Rotation führt, hat Professor Richelot integrirt und daraus die Integralgleichungen des ungestörten Problems und die Differentialgleichungen des gestörten Problems abgeleitet in einer Abhandlung, die in den Schriften der Berliner Akademie 1851 niedergelegt ist. Ich schließe mich im Folgenden der von ihm angewandten Bezeichnung so weit als möglich an.

Es sei der feste Punkt der Schwerpunkt, und in diesen falle zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten. Es seien x y z die Coordinaten eines Elements der Masse des rotirenden Körpers, bezogen auf ein im Raume festes Coordinatensystem, und x_1 y_1 z_1 die Coordinaten desselben Elements bezogen auf die drei Hauptaxen des Körpers. Dann ist

$$x = a\, x_1 + b\, y_1 + c\, z_1$$
$$y = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1$$
$$z = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1$$

und die Coefficienten haben folgende Bedeutung:

$$a = \sin\vartheta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi$$
$$b = \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi$$
$$c = \sin\vartheta \sin\psi$$
$$a_1 = \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi$$
$$b_1 = \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi$$
$$c_1 = \sin\vartheta \cos\psi$$
$$a_2 = -\sin\vartheta \sin\varphi$$
$$b_2 = -\sin\vartheta \cos\varphi$$
$$c_2 = \cos\vartheta$$

Die Winkel φ, ψ, ϑ haben dieselbe Bedeutung wie bei Richelot.

Die Integralgleichungen sind nach Seite 34

$$t + b = \frac{C}{A-B} \int_{r_0}^{r} \frac{d\,r}{p\,q}$$

$$b_1 = \psi - \text{arc tang} \frac{\vartheta_1 \sin\vartheta}{\psi_1 \cos\vartheta + Cr}$$

$$b_2 = \text{arc tang} \frac{\varrho\,\vartheta_1 \sin\vartheta}{\varrho^2 \cos\vartheta + Cr\psi_1} + \frac{\varrho\,C}{A-B} \int_{r_0}^{r} \frac{Cr^2 - 2\,t_1}{\varrho^2 - C^2 r^2} \cdot \frac{d\,r}{p\,q}$$

Hier sind $b, b_1, b_2, \psi_1, \varrho, t_1$ die willkürlichen Constanten des Problems. r_0 ist entweder eine reine Constante oder der Werth von r, der zu $q = o$ gehört, nämlich

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{2\,t_1\,A - \varrho^2}{C\,(A-C)}\right)}.$$

Dieses ist zugleich der Werth des Maximums von r. Zugleich folgt aus der ersten Gleichung, daß $t = -b$ die Zeit ist, für welche $r = r_0$ ist. Jetzt kommt es darauf an, die Bedeutung der übrigen willkürlichen Constanten festzustellen. Ich rekapitulire kurz das von Richelot gesagte.

Man führe zunächst ein anderes den beiden frühern gleichartiges Coordinatensystem ein $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ (bei Richelot X Y Z), indem man in der x y Ebene vom festen Punkte aus, um welchen die Drehung vor sich geht, einen Radius-Vektor aufträgt, von welchem aus direkt gezählt die positive x Halbaxe um den Winkel b_1 entfernt ist. Diesen betrachte ich als die von der x y Ebene niedersteigende Knotenlinie der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ Ebene. Die positive z Halbaxe bilde mit der positiven $\mathfrak{z}$ Halbaxe den zwischen o und π liegenden Winkel γ (Richelot hat Γ), welcher durch die Gleichung

$$\psi_1 = -\varrho \cos\gamma$$

aus den Constanten ϱ und ψ_1 bestimmt wird, und der von derselben Knotenlinie bis zur positiven $\mathfrak{x}$ Halbaxe direkt gezählte Winkel in der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ Ebene sei β.

Bezeichnet man endlich den auf der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ Ebene vom auf ihr niedersteigenden Knoten des Aequators bis zur positiven $\mathfrak{x}$ Halbaxe direkt gezählten Winkel mit Ψ und den von derselben Knotenlinie aus in der Ebene des Aequators bis zur positiven x_1 Halbaxe direkt gezählten Winkel mit Φ, sowie den kleinsten Winkel zwischen den positiven $\mathfrak{z}$ und z_1 Halbaxen mit Θ, so hat man alle zur geometrischen Deutung der in der Lösung vorkommenden Größen erforderlichen Stücke eingeführt.

Zwischen den drei bis jetzt eingeführten Coordinatensystemen existiren lineäre Relationen. Nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= a\,x + a_1\,y + a_2\,z \\ y_1 &= b\,x + b_1\,y + b_2\,z \\ z_1 &= c\,x + c_1\,y + c_2\,z, \end{aligned}$$

wo die a b c dieselbe Bedeutung haben wie oben. Ferner ist auch:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z} \\ y_1 &= \mathfrak{b}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z} \\ z_1 &= \mathfrak{c}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

und die $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ haben dieselbe Bedeutung wie die a b c, wenn darin $\varphi\ \psi\ \vartheta$ mit $\Phi\ \Psi\ \Theta$ vertauscht wird. Endlich ist

$$\mathfrak{x} = \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z$$
$$\mathfrak{y} = \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z$$
$$\mathfrak{z} = \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z$$

und die $\alpha\ \beta\ \gamma$ geben dieselbe Bedeutung wie die a b c, wenn darin für $\varphi\ \psi\ \vartheta$ gesetzt wird $\alpha\ \beta\ \gamma$ und für den früher mit b_1 bezeichneten Winkel α.

Aus der geometrischen Bedeutung der eingeführten Winkel folgt, daß

$$\pi - \vartheta,\ \psi - \alpha,\ \Phi - \varphi$$

oder wenn letzteres negativ ist

$$\pi - \vartheta,\ \psi - \alpha,\ 2\pi + \Phi - \varphi$$

ein Winkel und die beiden ihn einschließenden Seiten eines sphärischen Dreiecks sind, deren gegenüberliegende Stücke beziehungsweise sind

$$\Psi - \beta,\ \Theta,\ \gamma.$$

Führt man in die Interalgleichungen Φ und Ψ für φ und ψ ein, so gehen diese über in (bei Richelot Seite 42)

$$t + b = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{A\ B \sqrt{C}\ .\ d\ \Phi}{N \qquad \Phi},$$

$$b_2 = \beta - \Psi - \varrho \sqrt{C} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{(B \sin^2 \Phi + A \cos^2 \Phi)\ d\ \Phi}{N}$$

$$N = \sqrt{[B\,(2\,t_1\,A - \varrho^2)\,\sin^2 \Phi + A\,(2\,t_1\,B - \varrho^2)\,\cos^2 \Phi] \cdot [B\,(A - C)\,\sin^2 \Phi + A\,(B - C)\,\cos^2 \Phi]}$$

Für $t = -b$ wird $\qquad -b_2 = \Psi_0 - \beta,$

woraus folgt, daß die Constante $-b_2$ den am Anfang der Bewegung in der $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ Ebene vom niedersteigenden Knoten des Aequators bis zum aufsteigenden der x y Ebene direkt gezählten Winkel ausdrückt.

Zwischen Φ und Θ besteht aber die Relation

$$\varrho^2\,(A\,B - B\,C\,\sin^2 \Phi - C\,A\,\cos^2 \Phi)\,\sin^2 \Theta = A\,B\,(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)$$

woraus folgt

$$\varrho \cos \Theta = \pm \sqrt{\left(\frac{B\,C\,(2\,t_1\,A - \varrho^2)\,\sin^2 \Phi + C\,A\,(2\,t_1\,B - \varrho^2)\,\cos^2 \Phi}{B\,(A - C)\,\sin^2 \Phi + A\,(B - C)\,\cos^2 \Phi}\right)}.$$

Das vor dem Wurzelzeichen stehende doppelte Zeichen bleibt unbestimmt, so lange über die Lage der dritten Hauptaxe nichts festgesetzt ist. Nimmt man B als das mittlere Moment der Trägheit des rotirenden Körpers an, so daß A—B und B—C dasselbe Zeichen haben, unterscheidet die Fälle

$$2\,t_1\,B - \varrho^2 > o \text{ und } 2\,t_1\,B - \varrho^2 < o$$

dadurch, daß man im ersten Fall $A > B > C$ annimmt, im zweiten Falle $A < B < C$, so hängt die Frage, welches Zeichen man zu nehmen hat, davon ab, ob die positive $\mathfrak{z}$ Halbaxe über oder unter der Ebene liegt, zu welcher im ersten Fall die beiden größten, im zweiten Falle die

1*

beiden kleinsten Momente der Trägheit gehören. Man kann daher festsetzen, daß das Zeichen von $\varrho \cos \Theta$ mit dem Zeichen von $2 t_1 B - \varrho^2$ übereinstimmen soll. In diesen beiden Fällen haben die 6 Differenzen

$$\begin{matrix} A-B & A-C & B-C \\ 2 t_1 A-\varrho^2 & 2 t_1 B-\varrho^2 & \varrho^2 - 2 t_1 C \end{matrix}$$

dasselbe Zeichen und zwar sind sie im ersten Fall positiv, im zweiten negativ. Steht nun im Folgenden ein doppeltes Vorzeichen, so soll stets das obere Zeichen für den ersten Fall gelten, das untere für den zweiten.

Die vorhin eingeführten Größen p, q, r bedeuten die Rotationsgeschwindigkeiten um die drei Hauptaxen. Nenne ich die Winkelgeschwindigkeit um die momentane Drehungsaxe

$$\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$$

ω, so sind

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}$$

die Cosinus der Winkel, welche diese Axe mit den Hauptaxen bildet. Es ist aber

$$A p = - \varrho \sin \Phi \sin \Theta, \quad B q = - \varrho \sin \Theta \cos \Phi, \quad C r = \varrho \cos \Theta.$$

Nehme ich als Anfangswerth von r den Werth seines Maximums, dem der Werth $q = o$ entspricht, so fällt am Anfange der Zeit die momentane Drehungsaxe in die $x_1 y_1$ Ebene. Dieser Anfangslage entspricht aber der Werth $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Nimmt man ferner als Anfangswerth von Ψ den Werth $\Psi_0 = o$, so folgt aus dem Früheren $b_2 = \beta$. —

Jakobi hat in der Abhandlung „Sur le rotation d'un corps" Crelle Bd. 39 die sämmtlichen Coefficienten a, b, c mittelst elliptischer Funktionen und Transcendenten durch die Zeit ausgedrückt. Dabei hat er den Anfangswerth $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ zu Grunde gelegt. Der Modul ist

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)\ (\varrho^2 - 2 t_1 C)}{(B-C)\ (2 t_1 A - \varrho^2)}},$$

und die Transformation in elliptische Funktionen geschieht durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \Phi + \sqrt{\frac{A\ (B-C)}{B\ (A-C)}} \operatorname{cotang} \operatorname{am} (u, k) = o.$$

Setzt man diesen Werth in die früher genannten Integralgleichungen, so wird

$$n\ (t + b) = u$$

und

$$b_2 + \Psi - \beta + \frac{\varrho\, u}{A\, n} = \pm\, i\, \pi, \quad (u, ia, k),$$

wo

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)\ (2 t_1 A - \varrho^2)}{A B C}}, \quad \operatorname{tang} \operatorname{am} (a, k_1) = \sqrt{\frac{A\ (B-C)}{C\ (A-B)}}$$

gesetzt ist. Der letzten Integralgleichung kann man die Form geben

$$b_2 + \Psi - \beta = - n' u \pm \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta\ (u - ia)}{\Theta\ (u + ia)},$$

wo

$$n' = \frac{\varrho}{A\, n} \mp \frac{\partial \lg \Theta\ (i a)}{\partial a}$$

$$= \pm \left(\frac{C}{A-C} \frac{\partial \lg H\ (ia)}{\partial a} - \frac{A}{A-C} \frac{\partial \lg \Theta\ (ia)}{\partial a} \right)$$

ist. Geht man von den Logarithmen zu den Exponentialfunktionen und den trigonometrischen über, so erhält man (Richelot S. 49 und Crelle Bd. 39 S. 314)

$$\cos (b_2 - \beta + \Psi + n' u) = \frac{\Theta (u + ia) - \Theta (u - ia)}{2 \sqrt{\Theta (u + ia) \, \Theta (u - ia)}}$$

$$\pm \sin (b_2 - \beta + \Psi + n' u) = \frac{\Theta (u + ia) + \Theta (u - ia)}{2 \sqrt{\Theta (u + ia) \, \Theta (u - ia)}}.$$

Ist $\Psi_0 = o$, so ist $b_2 - \beta = o$.

Jakobi führt nun statt $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ ein Coordinatensystem $\mathfrak{x}'\ \mathfrak{y}'\ \mathfrak{z}'$ ein in der Art, daß $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ zusammenfallen, also auch die $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ Ebene mit der $\mathfrak{x}'\ \mathfrak{y}'$. Dieses neue System soll sich aber in der $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n n' so drehen, daß nach einer Drehung von 90 Grad die positive $\mathfrak{x}'$ Halbaxe in die positive $\mathfrak{y}'$ Halbaxe fällt. Die Einführung dieses Systems geschieht mittelst der Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \cos n' u - \mathfrak{y}' \sin n' u$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}' \cos n' u + \mathfrak{y}' \sin n' u.$$

Es wird jetzt

$$x_1 = \mathfrak{a}' \mathfrak{x}' + \mathfrak{a}_1' \mathfrak{y}' + \mathfrak{a}_2' \mathfrak{z}'$$
$$y_1 = \mathfrak{b}' \mathfrak{x}' + \mathfrak{b}_1' \mathfrak{y}' + \mathfrak{b}_2' \mathfrak{z}'$$
$$z_1 = \mathfrak{c}' \mathfrak{y}' + \mathfrak{c}_1' \mathfrak{y}' + \mathfrak{c}_2' \mathfrak{z}'$$

wo die $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ dieselbe Bedeutung wie die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ haben, wenn darin gesetzt ist

$$\Psi + n' u = \Psi'.$$

Die jetzigen Coefficienten $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'$ sind periodische Funktionen der Zeit, welche nach der Zeit

$$T = \frac{2\ k}{n} \cdot h,$$

wo h eine beliebige ganze Zahl bedeute, dieselben Werthe wieder annehmen.

Setze ich für $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ die Werthe in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in die Gleichungen des Systems

$$x_1 = \mathfrak{a}' \mathfrak{x}' + \mathfrak{a}_1' \mathfrak{y}' + \mathfrak{a}_2' \mathfrak{z}',$$

so giebt die Vergleichung mit dem System $x_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cos n' u - \mathfrak{a}_1' \sin n' u$$
$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}' \sin n' u + \mathfrak{a}_1' \cos n' u$$
$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2'$$

und dasselbe in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.

Hätte ich nicht den Werth $\Psi_0 = o$ als Anfangswerth angenommen, so hätte ich in diesen letzten Gleichungen nur

$$n' u + b_2 - \beta \text{ für } n' u$$

zu schreiben.

Nach Jakobi sind nun die Werthe der Coefficienten:

$$\mathfrak{a}' = -\frac{\Theta_1 (o) [H (u + ia) + H (u - ia)]}{2 H_1 (ia) \Theta u}, \quad \mathfrak{a}_1' = \mp \frac{\Theta_1 (o) [H (u + ia) - H (u - ia)]}{2 i H_1 (ia) \Theta (u)}$$

$$\mathfrak{b}' = -\frac{\Theta (o) [H_1\, u + ia) + H_1 (u - ia)]}{2 H_1 (ia) \Theta (u)}, \quad \mathfrak{b}_1' = \mp \frac{\Theta (o) [H_1 (u + ia) - H_1 (u - ia)]}{2 i H_1 (ia) \Theta (u)}$$

$$\mathfrak{a}_2' = -\frac{\Theta (ia) H_1 (u)}{H_1 (ia) \Theta (u)}, \quad \mathfrak{b}_2' = \frac{\Theta_1 (ia) H (u)}{H_1 (ia) \Theta (u)}, \quad \mathfrak{c}_2 = \pm \frac{H (ia) \Theta_1 (u)}{i H_1 (ia) \Theta (u)}$$

$$p = \frac{\varrho}{A}\, a_2', \quad q = \frac{\varrho}{B}\, b_2', \quad r = \frac{\varrho}{C}\, c_2'$$

$$\frac{\Theta\,(ia)}{H_1\,(ia)} = \sqrt{\frac{k^1}{k}}\sqrt{\frac{A\,(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)}{(A-C)\,\varrho^2}}, \quad \frac{\Theta_1\,(ia)}{H_1\,(ia)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{B\,(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)}{(B-C)\,\varrho^2}},$$

$$\frac{H\,(ia)}{i\,H_1\,(ia)} = \sqrt{k^1}\sqrt{\frac{C\,(2\,t_1\,A - \varrho^2)}{(A-C)\,\varrho^2}}.$$

Somit sind wir in den Stand gesetzt, die auf die Hauptaxen des rotirenden Körpers bezogenen Coordinaten auf ein im Raum festes Coordinatensystem zu beziehen. Die Coefficienten sind gegebene Funktionen der Zeit und der willkürlichen Konstanten

$$t_1, \quad b, \quad \varrho, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma. \text{ —}$$

Wir haben bis jetzt die Rotation des Körpers nur unter der Voraussetzung behandelt, daß keine weiteren Kräfte auf ihn wirken. Treten nun neue Kräfte auf, deren Kräftefunktion Ω sei, so werden die 6 willkürlichen Constanten Variationen erleiden. Die Constanten t_1, ψ_1, ϱ und b, b_1, b_2 sind aber solche Elemente, daß die Störungsgleichung in Bezug auf dieselben die kononische Form annehmen, d. h. es wird

$$\frac{d\,t_1}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b}, \quad \frac{d\,\psi_1}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b_1}, \quad \frac{d\,\varrho}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b_2}$$

$$\frac{d\,b}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,t_1}, \quad \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b_1} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\psi_1}, \quad \frac{d\,b_2}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\varrho}.$$

Dabei ist bei uns zu setzen

$$b_1 = \alpha \qquad b_2 = \beta.$$

Statt ψ_1 wurde aber γ eingeführt durch die Gleichung

$$\psi_1 = -\,\varrho\,\cos\gamma.$$

Führe ich auch γ als Element des Störungsproblems ein, so gehen die Störungsgleichungen über in

$$\frac{d\,t_1}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b} \qquad\qquad \frac{d\,b}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,t_1}$$

$$\frac{d\,\gamma}{d\,t} = \frac{1}{\varrho\sin\gamma}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\alpha} + \frac{\cos\gamma}{\varrho\sin\gamma}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\beta} \qquad \frac{d\,\alpha}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\gamma}\,\frac{1}{\varrho\sin\gamma}$$

$$\frac{d\,\varrho}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\beta} \qquad\qquad \frac{d\,\beta}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\varrho} - \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\gamma}\,\frac{\cos\gamma}{\varrho\sin\gamma}$$

Dieses ist aber die Poisson'sche Form der Störungsgleichungen, welche er in seiner ersten Abhandlung über die Variation der Konstanten (Jour. de l'école polyt. cah. 15) abgeleitet hat, wenn man hierin h für $-\,2\,t_1$ setzt.

Als störende Kraft nehme ich die Anziehung eines andern festen Körpers an. Es sei $d\,m_1$ das Massenelement des rotirenden Körpers an der Stelle $x_1\,y_1\,z_1$ und $d\,L$ das Massenelement des störenden Körpers an der Stelle $\xi\,\eta\,\zeta$. Es sei der Schwerpunkt des rotirenden Körpers der Anfangspunkt der Coordinaten und beide Systeme seien bezogen auf die Hauptaxen des rotirenden Körpers. Dann ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$\Omega = \int\!\!\int \frac{d\,m_1\;d\,L}{\sqrt{[(x_1-\xi)^2 + (y_1-\eta)^2 + (z_1-\zeta)^2]}},$$

wo die Integration auf beide Körper auszudehnen ist.

Ist der rotirende Körper ein Weltkörper, so ist der störende Körper ein anderer Weltkörper. In diesem Fall können wir von der Form des störenden Körpers abstrahiren und uns seine Masse in seinem Schwerpunkt concentrirt denken. Es wird dann

$$\Omega = L \int \frac{d\, m_1}{\sqrt{[(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2]}},$$

und $\xi\ \eta\ \zeta$ sind jetzt die Coordinaten des Schwerpunkts des Gestirns. Setze ich

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = r_1 \quad \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = \delta,$$

so ist r_1 die Entfernung des innerhalb oder auf dem rotirenden Körper liegenden Punkts $x_1\ y_1\ z_1$ vom Schwerpunkt, und δ ist die Entfernung der Schwerpunkte der beiden betrachtenden Körper von einander. In der Natur ist δ immer gegen r_1 groß; ich kann daher die reciproke Wurzel der Störungsfunktion nach fallenden Potenzen von δ entwickeln. In dieser Entwicklung ist

$$\int x_1\, d\, m_1 = 0 \quad \int y_1\, d\, m_1 = 0 \quad \int z_1\, d\, m_1 = 0$$

zu setzen, wegen der bekannten Eigenschaften des Schwerpunkts. Ferner ist

$$L \int x_1\, y_1\, d\, m_1 = 0 \quad L \int x_1\, z_1\, d\, m_1 = 0 \quad L \int x_1\, z_1\, d\, m_1 = 0,$$

weil $x_1\ y_1\ z_1$ die Hauptaxen des rotirenden Körpers sind. Wenn ich nun bedenke, daß $\xi\ \eta\ \zeta$ den Faktor δ haben und nur bis zur vierten Potenz von δ gehe, so wird

$$\Omega = L \left[\int d\, m_1 - \frac{1}{2\ \delta^3} \int r_1^2\, d\, m_1 + \frac{3}{8\ \delta^5} \int r_1^4\, d\, m_1 \right] +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{L}{\delta^3} \left[\frac{\xi^2}{\delta^2} \int x_1^2\, d\, m_1 + \frac{\eta^2}{\delta^2} \int y_1\, dm_1 + \frac{\zeta^2}{\delta^2} \int z_1\, d\, m_1 \right] + D$$

$$D = - \frac{3}{8} \frac{4\ L}{\delta^4} \left[\frac{\xi}{\delta} \int r_1^2\, x_1\, d\, m_1 + \frac{\eta}{\delta} \int r_1^2\, y_1\, d\, m_1 + \frac{\zeta}{\gamma} \int r_1^2\, z_1^2\, d\, m_1 \right.$$

$$\left. - \frac{5}{3} \int \left(\frac{x_1^2\ \xi^2}{\delta^2} + \frac{y_1^2\ \eta^2}{\delta^2} + \frac{z_1^2\ \zeta^2}{\delta^2} \right) \left(\frac{x_1\ \xi}{\delta} + \frac{y_1\ \eta}{\delta} + \frac{z_1\ \zeta}{\delta} \right) d\, m_1 \right].$$

Ist der betrachtete Körper symmetrisch in Bezug auf die drei Hauptaxen, ist er also z. B. ein homogenes Ellipsoid, so ist $D = 0$, weil unter dem Integralzeichen nur ungerade Potenzen der Coordinaten stehen. Es entspricht z. B. in

$$\int x_1^3\, d\, m_1$$

jedem Theilchen $x_1^3\, d\, m_1$ ein anderes $- x_1^3\, d\, m_1$, welche sich wegheben.

Da ich aber nur die Differentialquotienten von Ω nach den Elementen des Rotationsproblems brauche und die Integrale, welche in der Entwicklung vorkommen, ebenso wie δ, davon unabhängig sind, so kann ich die Größen, welche allein von den genannten Größen abhängen, weglassen, und habe

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{L}{\delta^3} \left[\frac{\xi^2}{\delta^2} \int x_1^2\, d\, m_1 + \frac{\eta^2}{\delta^2} \int y_1^2\, d\, m_1 + \frac{\zeta^2}{\delta^2} \int z_1^2\, d\, m_1 \right] + D.$$

Nun sind aber

$$\int (y_1^2 + z_1^2)\, d\, m_1 = A, \int (x_1^2 + z_1^2)\, d\, m_1 = B, \int (x_1^2 + y_1^2)\, d\, m^1 = C$$

die Momente der Trägheit des Körpers.

Führe ich diese Bezeichnung ein, so wird

$$\Omega = \frac{3\,L}{2\,\delta^5}\left[\frac{B + C - A}{2}\,\xi^2 + \frac{A + C - B}{2}\,\eta^2 + \frac{A + B - C}{2}\,\zeta^2\right] + D.$$

Setze hierin $\zeta^2 = \delta^2 - \xi^2 - \eta^2$
und lasse das Glied, welches für die Differentiation constant ist, fort, so folgt

$$\Omega = -\frac{3\,L}{2\,\delta^5}\left[(A - C)\,\xi^2 + (B - C)\,\eta^2\right] + D.$$

ξ und η beziehen sich auf die Hauptaxen des rotirenden Körpers. Dieselben sind jetzt auf ein festes Coordinatensystem zu beziehen. Zunächst beziehen wir dieselben auf das System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mittelst der Gleichungen

$$\xi = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z}$$
$$\eta = \mathfrak{b}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y} + \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z},$$

so wird

$$\xi^2 = \mathfrak{a}^2\,\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{a}_1^2\,\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{a}_2^2\,\mathfrak{z}^2 + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$$

oder wenn ich

$$\mathfrak{a}_2^2 = 1 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}_1^2$$

setze:

$$\xi^2 = \mathfrak{a}^2\,(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2) + \mathfrak{a}_1^2\,(\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{z}^2) + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z} + \mathfrak{z}^2$$

und ähnlich η^2, also

$$\Omega = -\frac{3\,L}{2\,\delta^5}\Big(\left[(A{-}C)\,\mathfrak{a}^2 + (B{-}C)\,\mathfrak{b}^2\right](\mathfrak{x}^2{-}\mathfrak{z}^2) + \left[(A{-}C)\,\mathfrak{a}_1^2 + (B{-}C)\,\mathfrak{b}_1^2\right](\mathfrak{y}^2{-}\mathfrak{z}^2)$$
$$+ 2\left[(A{-}C)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 + (B{-}C)\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1\right]\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + 2\left[(A{-}C)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_2 + (B{-}C)\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2\right]\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}$$
$$+ 2\left[(A{-}C)\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 + (B{-}C)\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\right]\mathfrak{x}\,\mathfrak{z} + (A + B - 2\,C)\,\mathfrak{z}^2\Big).$$

Nun kommt es darauf an, die Combinationen der $\mathfrak{a}$ zu je zwei und $\mathfrak{b}$ zu je zwei nach den cos und sin der Vielfachen der Zeit zu entwickeln. Es war aber

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\cos n'u - \mathfrak{a}'_1 \sin n'u$$
$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}'\sin n'u + \mathfrak{a}'_1 \cos n'u$$
$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}'_2$$

also

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{a}_1'^2}{2} + \frac{\mathfrak{a}'^2 - \mathfrak{a}_1'^2}{2}\cos 2\,n'u - \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1'\sin 2\,n'u$$

$$\mathfrak{a}_1^2 = \frac{\mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{a}_1'^2}{2} - \frac{\mathfrak{a}'^2 - \mathfrak{a}_1'^2}{2}\cos 2\,n'u + \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1'\sin 2\,n'u$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{a}'^2 - \mathfrak{a}_1'^2}{2}\sin 2\,n'u + \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1'\cos 2\,n'u$$

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}'\sin n'u + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}'_1\cos n'u.$$

Wenn ich $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ vertausche, erhalte ich die Gleichungen für $\mathfrak{b}$. Diese Werthe setze ich in Ω ein und habe:

$$\Omega = -\frac{3\,L}{2\,\delta^5}\Big\{\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-2\,\mathfrak{z}^2}{2}\Big((A-C)\;(\mathfrak{a}'^2+\mathfrak{a}_1'^2)+(B-C)\;(\mathfrak{b}'^2+\mathfrak{b}_1'^2)\Big)+\mathfrak{z}^2\,(A+B-2\,C)$$

$$+\frac{\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2}{2}\Big(\cos 2\,n'u\,[(A-C)\,(\mathfrak{a}'^2-\mathfrak{a}_1'^2)+(B-C)\,(\mathfrak{b}'^2-\mathfrak{b}_1'^2)]-\sin 2\,n'u\,[2\,(A-C)\,\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'+2\,(B-C)\,\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1']\Big)$$

$$+\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\;\Big(\sin 2\,n'u\,[(A-C)\,(\mathfrak{a}'^2-\mathfrak{a}_1'^2)+(B-C)\,(\mathfrak{b}'^2-\mathfrak{b}_1'^2)]+\cos 2\,n'u\,[2\,(A-C)\,\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'+2\,(B-C)\,\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1']\Big)$$

$$+\,2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,\Big(\cos\,n'u\;[(A-C)\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}'+(B-C)\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{b}']-\sin\,n'u\;[(A-C)\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_1'+(B-C)\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{b}_1']\Big)$$

$$+\,2\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\Big(\sin\,n'u\;[(A-C)\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}'+(B-C)\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{b}']+\cos\,n'u\;[(A-C)\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_1'+(B-C)\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{b}_1']\Big)\Big\}$$

Der zweite Faktor des ersten Gliedes läßt sich sehr einfach durch die von Jakobi eingeführte Funktion Z (u) ausdrücken. Nämlich:

$$\mathfrak{a}'^2+\mathfrak{a}'_1{}^2 = 1-\mathfrak{a}_2{}^2 = 1-\frac{c^2\;u}{c^2(ia)} = 1-\frac{1}{c^2(ia)}+\frac{s^2\,(u)}{c^2\,(ia)} = -\,t^2\,(ia)+\frac{s^2\,(u)}{c^2\,(ia)}$$

$$\mathfrak{b}'^2+\mathfrak{b}'_1{}^2 = 1-\mathfrak{b}_2{}^2 = 1-\frac{\Delta^2\,(ia)\,s^2\,(u)}{c^2\,(ia)}.$$

$$(A-C)\,(\mathfrak{a}'^2+\mathfrak{a}_1'^2)+(B-C)\;(\mathfrak{b}'^2+\mathfrak{b}_1'^2) = (A-C)\;t^2\,(ia)+(B-C)+s^2\,(u)\Big(\frac{A-C}{c^2\,(ia)}-\frac{\Delta^2\,(ia)\,(B-C)}{c^2\,(ia)}\Big)$$

Nun ist aber (Crelle Bd. 39 S. 315)

$$t^2\;(ia) = -\;C\;\frac{2\;A\;t_1\;-\;\varrho^2}{(A-C)\;\varrho^2};\;\;\Delta^2\;(ia) = \frac{B\;(A-C)}{A\;(B-C)};\;\;k^2\,c^2\,(ia) = \frac{(A-B)\;\;(A-C)\;\varrho^2}{A\;\;(A-C)\;\;(2t_1\;\;A-\varrho^2)}$$

wodurch ich erhalte

$$(B-C)\;+\;C\;\frac{2\;t_1\;\;A-\varrho^2}{\varrho^2}\;+\;\frac{(A-C)\;\;(A-B)}{A\;\;k^2\;\;c^2\;\;(ia)}\cdot\;k^2\;\;s^2\;\;(u)$$

oder da $s^2\;(u) = \dfrac{Z'\;(o)\;-\;Z'\;(u)}{k^2}$ ist,

$$(A\;+\;B-2\;C)\;-\;A\;\frac{\varrho^2-2\;\;t_1\;\;C}{\varrho^2}\;+\;\frac{2\;\;t_1\;\;A-\varrho^2}{\varrho^2}\;(B-C)\;\Big(Z'\;\;(o)\;-\;Z'\;\;(u)\Big)\cdot$$

Das erste Glied werfe ich zu dem Gliede $\mathfrak{z}^2$ (A + B — 2 C) und habe für die beiden ersten Glieder von Ω:

$$\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\mathfrak{z}^2}{2}\Big[\frac{2\,A\,t_1\,-\,\varrho^2}{\varrho^2}\,(B-C)\,\Big(Z'\,(o)\,-\,Z'\,(u)\Big)-\frac{A\,(\varrho^2-2t_1\,C)}{\varrho^2}\Big]+\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{2}(A+B-2C$$

Ferner brauche ich die Entwicklungen für die übrigen Combinationen der $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

$$\frac{\mathfrak{a}'^2\;-\;\mathfrak{a}_1'^2}{2} = \frac{\Theta_1{}^2\;\;(o)}{4\;H_1{}^2\;(ia)}\;\;\frac{H^2\;\;(u+ia)\;+\;H^2\;\;(u-i\,a)}{\Theta^2\;\;(u)}$$

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1' = \mp\;\frac{\Theta_1{}^2\;\;(o)}{i\,4\,H_1{}^2\,(i\,a)}\cdot\;\;\frac{H^2\;\;(u+i\,a)\;-\;H^2\;\;(u-i\,a)}{\Theta^2\;\;(u)}$$

$$\frac{\mathfrak{b}'^2-\mathfrak{b}_1'^2}{2} = \frac{\Theta^2\;\;(o)}{4\;\;H_1{}^2\;\;(ia)}\;\;\frac{H_1{}^2\;\;(u+ia)\;-\;H_1{}^2\,(u-ia)}{\Theta^2\;\;(u)}$$

$$b' \, b'_1 = \mp \frac{\Theta^2 (o)}{i \, 4 \, H_1^2 (ia)} \; \frac{H_1^2 (u + ia) + H_1^2 (u - ia)}{\Theta^2 (u)}$$

$$a_2 \, a' = \frac{\Theta_1 (o) \, \Theta (ia)}{2 \, H_1^2 (ia)} \; \frac{H_1 (u) \, H (u + ia) + H_1 (u) \, H (u - ia)}{\Theta^2 (u)}$$

$$a_2 \, a_1' = \mp \frac{\Theta_1 (o) \, \Theta (ia)}{i \, 2 \, H_1^2 (ia)} \; \frac{H_1 (u) \, H (u + ia) - H_1 (u) \, H_1 (u - ia)}{\Theta^2 (u)}$$

$$b_2 \, b' = - \frac{\Theta (o) \, \Theta_1 (ia)}{2 \, H_1^2 (ia)} \; \frac{H (u) \, H_1 (u + ia) + H (u) \, H_1 (u - ia)}{\Theta^2 (u)}$$

$$b_2 \, b_1' = \pm \frac{\Theta (o) \, \Theta_1 (ia)}{i \, 2 \, H_1^2 (ia)} \; \frac{H (u) \, H_1 (u + ia) - H (u) \, H_1 (u - ia)}{\Theta^2 (u)} .$$

Diese Ausdrücke kann ich entwickeln in Reihen, die nach den cos und sin der Vielfachen der Zeit fortschreiten, mit Hilfe eines Satzes, den **Dumas** in der Abhandlung „Ueber die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde", **Crelle** Bd. 50, gegeben hat. Dieser Satz beruht auf der Entwicklung der Θ Funktion in Partialbrüche und lehrt die Entwicklung der Funktion

$$\frac{\Theta (u + v_1) \, \Theta (u + v_2) \, . \, . \, . \, \Theta (u + v_n)}{\Theta (u + w_1) \, \Theta (u + w_2) \, . \, . \, . \, \Theta (u + w_n)}$$

in Summen von $\frac{\Theta (u + v_h)}{\Theta (u + w_h)}$. Die Funktion, auf welche die Entwicklung von ihm zurückgeführt wird, ist

$$P (u, v) = \frac{\Theta (u + v) \, H' (o)}{\Theta (u) \, H (v)} ,$$

deren Entwicklung ist:

$$\frac{2K}{\pi} P (u, v) = \frac{1}{\sin \frac{v \pi}{2K}} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^h (1 - q^{2h}) \cos \frac{\pi v}{2K} \sin \frac{h \pi u}{K} + q^h (1 + 2q^h) \sin \frac{v \pi}{2K} \cos \frac{h \pi u}{K}}{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi v}{K} + q^{4h}}$$

In der **Jakobi**'schen Abhandlung wird nur die Entwicklung von Summen und Differenzen solcher Funktionen gebraucht und gegeben. Ich brauche hier nur das Produkt zweier solcher Funktionen und finde bei **Dumas**

$$P (u, v_1) \, . \, P (u, v_2) = - P' (u, v_1 + v_2) + [Y (v_1) + Y (v_2)] \; P (u, v_1 + v_2).$$

Wir können den Werthen von $a' \, a'_1$ u. s. w. eine solche Form geben, daß wir gerade auf solche Funktionen kommen. Es ist aber (**Jacobi**, Fundamenta S. 174)

$$H (u + v) = i \sqrt[4]{q} \, . \, e^{\frac{i \pi}{2K} (u + v)} \; \Theta (u + v + i K')$$

$$H (u + v) = i \sqrt[4]{q} \; e^{- \frac{i \pi}{2K} (u + v)} \; \Theta (u + v - i K')$$

$$\Theta\,(\mathrm{v}) = \mathrm{i}\,\sqrt[4]{\mathrm{q}}\;\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{v}}{2K}}\;H\,(\mathrm{v} + \mathrm{i}\,K')$$

$$\Theta\,(\mathrm{v}) = -\,\mathrm{i}\,\sqrt[4]{\mathrm{q}}\;\mathrm{e}^{\frac{-\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{v}}{2K}}\;H\,(\mathrm{v} - \mathrm{i}\,K').$$

Dividire ich die erste Formel durch die dritte und die zweite durch die vierte:

$$\frac{H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v})}{\Theta\,(\mathrm{v})} = \frac{\Theta\,(\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{i}\,K')}{H\,(\mathrm{v} + \mathrm{i}\,K')}\;\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{u}}{2K}}$$

$$\frac{H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v})}{\Theta\,(\mathrm{v})} = \frac{\Theta\,(\mathrm{u} + \mathrm{v} - \mathrm{i}\,K')}{H\,(\mathrm{v} - \mathrm{i}\,K')}\;\mathrm{e}^{\frac{-\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{u}}{2K}},$$

und setze in die erste Formel v_1 für v, in die zweite v_2 für v, so giebt das Produkt

$$\frac{H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_1)\;H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_2)}{\Theta\,(\mathrm{v}_1)\;\Theta\,(\mathrm{v}_2)} = \frac{\Theta\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_1 + \mathrm{i}\,K')\;\Theta\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_2 - \mathrm{i}\,K')}{H\,(\mathrm{v}_1 + \mathrm{i}\,K')\;H\,(\mathrm{v}_2 - \mathrm{i}\,K')}.$$

Dividire durch $\Theta^2\,(\mathrm{u})$ und multiplicire mit $\Theta\,\mathrm{v}_1 \,.\, \Theta\,\mathrm{v}_2$ und setze rechts den Werth in P:

$$\frac{H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_1)\;H\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}_2)}{\Theta^2\,(\mathrm{u})} = \frac{\Theta\,(\mathrm{v}_1)\;\Theta\,(\mathrm{v}_2)}{H'\,(\mathrm{o})\;H'\,(\mathrm{o})}\cdot P\,(\mathrm{u}, \mathrm{v}_1 + \mathrm{i}\,K')\cdot P\,(\mathrm{u}, \mathrm{v}_2 - \mathrm{i}\,K').$$

Mit Anwendung dieser Formel erhalte ich, wenn ich setze

$$\left[\frac{\Theta_1\,(\mathrm{o})\;\Theta\,(\mathrm{ia})}{H'\,(\mathrm{o})\;H_1\,(\mathrm{ia})}\right]^2 = \mathrm{F} \qquad \left[\frac{\Theta\,(\mathrm{o})\;\Theta_1'\,(\mathrm{ia})}{H'\,(\mathrm{o})\;H_1\,(\mathrm{ia})}\right] = \mathrm{F}_1,$$

$$\frac{\mathfrak{a}'^2 - \mathfrak{a}'^{\,2}_1}{2} = \frac{\mathrm{F}}{4}\Big[P\,(\mathrm{u}, \mathrm{ia} + \mathrm{i}K').\;P\,(\mathrm{u}, \mathrm{ia} - \mathrm{i}K') + P\,(\mathrm{u}, -\,\mathrm{ia} + \mathrm{i}K')\;P\,(\mathrm{u}, \mathrm{ia} - \mathrm{i}K')\Big]$$

$$\frac{\mathfrak{b}'^2 - \mathfrak{b}'^{\,2}_1}{2} = \mp\frac{\mathrm{F}_1}{4}\Big[P(\mathrm{u}, \mathrm{ia} + K + \mathrm{i}K')P(\mathrm{u}, \mathrm{ia} + K - \mathrm{i}K') + P(\mathrm{u}, -\mathrm{ia} + K + \mathrm{i}K')\;P(\mathrm{u}, -\mathrm{ia} + K - \mathrm{i}K')\Big]$$

$$\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}' = \frac{\mathrm{F}}{2}\Big[P\,(\mathrm{u},\; K + \mathrm{i}K')\;P\,(\mathrm{u},\;\mathrm{ia} - \mathrm{i}K') - P\,(\mathrm{u},\; K + \mathrm{i}K')\;P\,(\mathrm{u},\; -\,\mathrm{ia} - K')\Big]$$

$$\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{b}' = -\,\frac{\mathrm{F}_1}{2}\Big[P\,(\mathrm{u},\;\mathrm{i}K')\;\;P\,(\mathrm{u},\;\mathrm{ia} + K - \mathrm{i}K') + P\,(\mathrm{u},\;\mathrm{i}K')\;P\,(\mathrm{u},\; -\,\mathrm{ia} + K - \mathrm{i}K')\Big]$$

Die andern vier Formeln erhält man leicht durch Vergleichung dieser Formeln mit denen auf Seite 10.

Jetzt wende ich den über die Produkte der P angegebenen Satz an. Darin kommt vor

$$Y\,(\mathrm{v}_1 + \mathrm{i}K') + Y\,(\mathrm{v}_2 - \mathrm{i}K').$$

Mit Rücksicht auf die Formel (Fund. S. 174) ist

$$Y\,(\mathrm{v}) = \mathrm{Z}\,(\mathrm{v} + \mathrm{i}K') + \frac{\mathrm{i}\,\pi}{2K},$$

also

$$Y\,(\mathrm{v}_1 + \mathrm{i}K') + Y\,(\mathrm{v}_2 - \mathrm{i}K') = \mathrm{Z}\,(\mathrm{v}_1 + \mathrm{z}\,\mathrm{i}K') + \frac{\mathrm{i}\,\pi}{K} + \mathrm{Z}\,(\mathrm{v}_2)$$

$$\mathrm{Z}\,(\mathrm{v} + 2\,\mathrm{i}K') = -\,\frac{\mathrm{i}\,\pi}{K} + \mathrm{Z}\,(\mathrm{v})$$

$$Y\,(\mathrm{v}_1 + \mathrm{i}K') + Y\,(\mathrm{v}_2 - \mathrm{i}K') = \mathrm{Z}\,(\mathrm{v}_1) + \mathrm{Z}\,(\mathrm{v}_2).$$

Alſo:

$$\frac{a'^2 - a'^2_1}{2} = \frac{F}{4}\left[- P'(u, 2\,ia) - P'(u, -2\,ia) + 2\,Z(ia)\Big(P(u, 2\,ia) + P(u, -2\,ia)\Big)\right]$$

$$\frac{b'^2 - b'^2_1}{2} = \frac{F_1}{4}\left[- P'(u, 2\,ia + 2K) - P'(u, -2\,ia + 2K) + 2\,Z(ia + K)\Big(P(u, 2\,ia + 2K) - P(u, -ia + 2K)\Big)\right]$$

Hier bemerke ich, daß $P(u, v + 2K) = - P(u, v)$ iſt.

Dem $P(u, 2\,ia)$ werde ich eine etwas andere Form geben. Ich ſetze mit Jakobi $\frac{a}{K'} = b$ und führe für $\sin \frac{\pi\, ia}{2\,K'}$, $\cos \frac{\pi\, ia}{2\,K}$ die Exponentialgrößen ein. Dann wird

$$\frac{2K}{\pi} P(u, 2\,ia) = \frac{2\,q^b}{i\,1 - q^{2b}} + 2 \sum_1^\infty \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \cdot \sin \frac{h\pi u}{K}$$

$$+ 2 \sum_1^\infty \frac{q^{h-b}}{1 - q^{2h-2b}} \cdot \sin \frac{h\pi u}{K} + \frac{2}{i} \sum_1^\infty \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \cdot \cos \frac{h\pi u}{K}$$

$$- \frac{2}{i} \sum_1^\infty \frac{q^{h-b}}{1 - q^{2h-2b}} \cos \frac{h\pi u}{K}.$$

Bringe ich die beiden letzten Summen auf -1 und ∞, indem ich $-h$ für h ſetze, und ziehe noch das erſte Glied hinzu, ſo kann ich die Summe von o bis $-\infty$ nehmen. Die Größen unter dem Summenzeichen mit dem Argument o bis $-\infty$ wird aber gleich der Größe unter dem andern Summenzeichen, wenn wir Zähler und Nenner mit q^{2h+2b} multipliciren. Dann iſt aber

$$\frac{2K}{\pi} P(u, 2\,ia) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \left(\sin \frac{h\pi u}{K} + \frac{1}{i} \cos \frac{h\pi u}{K}\right)$$

$$\frac{2K}{\pi} P(u, -2\,ia) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \left(\sin \frac{h\pi u}{K} - \frac{1}{i} \cos \frac{h\pi u}{K}\right).$$

Alſo

$$P(u, 2\,ia) + P(u, -2\,ia) = \frac{\pi}{2K}\, 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \sin \frac{h\pi u}{K}$$

$$P(n, 2\,ia) - P(u, -2\,ia) = \frac{\pi}{2K} \frac{4}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \cos \frac{h\pi u}{K}.$$

Setze ich nun

$$(A - C)\,F - (B - C)\,F_1 = \Phi,\quad (A - C)\,F\,\frac{Z(ia)}{i} - (B - C)\,F_1\,\frac{Z(ia + K)}{i} = \Phi_1,$$

ſo wird

$$(A - C)\frac{a'^2 - a'^2_1}{2} + (B - C)\frac{b'^2 - b'^2_1}{2_1} = \frac{\pi}{2K} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \cos \frac{h\pi u}{K} \left(\frac{-h\pi}{K}\Phi + 2\,\Phi_1\right)$$

$$(A - C)\,a'\,a'_1 + (B - C)\,b'\,b'_1 = \mp \frac{\pi}{2K} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h+b}}{1 - q^{2h+2b}} \sin \frac{h\pi u}{K} \left(\frac{-h\pi}{K}\Phi + 2\,\Phi_1\right)$$

Den letzten Faktor kann ich vereinfachen, denn ich kann schreiben

$$F = \frac{1}{k\,k'} \left(\frac{\Theta\,(ia)}{H_1\,(ia)}\right)^2 = k^2 \,\frac{A\,(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)}{(A - C)\,\varrho^2}$$

$$F_1 = \frac{1}{k} \left(\frac{\Theta_1\,(ia)}{H_1\,(ia)}\right)^2 = k^2 \,\frac{B\,(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)}{(B - C)\,\varrho^2}.$$

Diese Werthe setze ich in Φ ein, so wird

$$\Phi = \frac{(2\,t_1\,A - \varrho^2)\,(B - C)}{\varrho^2}$$

$$\Phi_1 = -\,\frac{(\varrho^2 - 2\,t_1\,C)}{k^2\,\varrho^2} \left(A\,\frac{\partial\,\lg\,\Theta\,(ia)}{\partial\,a} + B\,\frac{\partial\,\lg\,\Theta_1\,(ia)}{\partial\,a}\right).$$

Nun ist aber (Crelle Bd. 39 S. 313)

$$\mp \frac{\partial\,\lg\,\Theta\,(ia)}{\partial\,a} = n' - \frac{\varrho}{A\,n}$$

$$\mp \frac{\partial\,\lg\,\Theta_1\,(ia)}{\partial\,a} = n' - \frac{\varrho}{B\,n}$$

also

$$\Phi_1 = \pm\,\frac{(2\,t_1\,A - \varrho^2)\,(B - C)}{\varrho^2}\,n' = \pm\,n'\,\Phi$$

$$\frac{h\,\pi}{K}\,\Phi - \Phi_1 = \Phi\left(\frac{h\,\pi}{K} + n'\right).$$

Ferner ist

$$a_2\,a' = \frac{F}{2}\Big[-P'(u, K + ia) - P'(u, K - ia) + Z\,(ia)\,\big(P\,(u, K + ia) - P\,(u, K - ia)\big)\Big]$$

$$b_2\,b' = -\frac{F_1}{2}\Big[-P'(u, K + ia) - P'(u, K - ia) + Z\,(ia + K)\,\big(P\,(u, K + ia) - P\,(u, K - ia)\big)\Big]$$

wo berücksichtigt ist, daß

$$P\,(u,\,K - ia) = P\,(u,\,2\,K - ia - K) = -\,P\,(u,\,-\,ia - K).$$

Die Entwicklungen dieser P Funktionen kann ich aus den früheren ableiten, indem ich $K - ia$ für $2\,ia$ setze, oder da

$$q^b = -\,e^{-\frac{\pi a}{K}}$$

ist, indem ich für q^b setze

$$e^{-\frac{\pi a}{2K}}\,e^{\frac{\pi i}{2}} = i\,q^{\frac{b}{2}}.$$

$$P\,(u, ia + K) + P\,(u, ia - K) = \frac{\pi}{2K}\,4 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h + \frac{b}{2}}}{1 + q^{2h + b}} \sin \frac{h\,\pi\,u}{K}$$

$$P\,(u, ia - K) - P\,(u, ia - K) = \frac{\pi}{2K}\,4 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{h + \frac{b}{2}}}{1 + q^{2h + b}} \cos \frac{h\,\pi\,u}{K}$$

$$(A-C)\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}' + (B-C)\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}' = \frac{\pi}{2K}\,2\,\Phi\,\Sigma\,\frac{q^{h+\frac{b}{2}}}{1+q^{2h+b}}\,\sin\frac{h\pi u}{K}\left(\frac{h\pi}{K} \mp n'\right)$$

$$(A-C)\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1' + (B-C)\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1' = \frac{\pi}{2K}\,2\,\Phi\,\Sigma\,\frac{q^{h+\frac{b}{2}}}{1+q^{2h+b}}\,\cos\frac{h\pi u}{K}\left(\frac{h\pi}{K} \mp n'\right).$$

Diese Werthe sind in den Ausdruck für Ω zu setzen. Wenn ich nun noch die Produkte von

$$\sin 2\,n'u,\ \cos 2\,n'u \text{ mit } \sin\frac{h\,\pi\,u}{K},\ \cos\frac{h\,\pi\,u}{K}$$

in cos und sin der Summe und Differenz der Argumente auflöse, so bekomme ich

$$\Omega = -\frac{3\,L}{\delta^5}\Bigg\{\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-2\,\mathfrak{z}^2}{2}\left[\frac{(2\,t_1\,A-\varrho^2)}{\varrho^2}(B-C)\Big(Z'(o)-Z'(u)\Big) - A\,\frac{\varrho^2-2\,t_1\,C}{\varrho^2}\right]$$

$$+\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{2}\Big(A+B-2\,C\Big)$$

$$-\frac{\Phi\,\pi}{2\,K}(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)\,\Sigma\,\frac{q^{h+b}}{1-q^{2h+2b}}\left(\frac{h\,\pi}{K}\mp 2\,n'\right)\cos\left(\frac{h\,\pi\,u}{K}\mp 2\,n'u\right)$$

$$+\frac{\Phi\,\pi}{2\,K}\,2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\Sigma\,\frac{q^{h+b}}{1-q^{2h+2b}}\left(\frac{h\,\pi}{K}\mp 2\,n'\right)\sin\left(\frac{h\,\pi\,u}{K}\mp 2\,n'u\right)$$

$$+\frac{4\,\Phi\,\pi}{2K}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,\Sigma\,\frac{q^{h+\frac{b}{2}}}{1+q^{2h+b}}\left(\frac{h\,\pi}{K}\mp n'\right)\sin\left(\frac{h\,\pi\,u}{K}\mp n'u\right)$$

$$+\frac{4\,\Phi\,\pi}{2\,K}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\Sigma\,\frac{q^{h+\frac{b}{2}}}{1+q^{2h+b}}\left(\frac{h\,\pi}{K}\mp n'\right)\cos\left(\frac{h\,\pi\,u}{K}\mp n'u\right)\Bigg\},$$

wo die Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen sind und

$$\Phi = \frac{2\,t_1\,A-\varrho^2}{\varrho^2}(B-C).\ —$$

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind die Coordinaten des Schwerpunkts des störenden Gestirns. Sollen dieselben sich beziehen auf ein beliebiges im Raume festes Coordinatensystem, so haben wir nach dem Früheren

$$\mathfrak{x} = \alpha\,x + \alpha_1\,y + \alpha_2\,z$$

u. s. w. zu setzen.

Sind die beiden Körper, der rotirende und der störende, Weltkörper, so sind x y z ebenfalls Funktionen der Zeit. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß die beiden Körper zu einander in dem Verhältnisse stehen, daß der eine der Centralkörper, der andere dessen Trabant ist. Für diesen Fall findet man nach einigen Rechnungen (vergl. Jakobi Crelle Bd. 60 S. 152 f. f.):

$$z = R\,\sin\,i\,\sin\,(v+p)$$
$$y = R\,\cos\,i\,\cos\,k\,\sin\,(v+p) - R\,\sin\,k\,\cos\,(v+p)$$
$$x = R\,\cos\,i\,\sin\,k\,\sin\,(v+p) + R\,\cos\,k\,\cos\,(v+p),$$

wo R die Entfernung der beiden Schwerpunkte, i die Neigung der Ebene der Bahn, k die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn, p die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten,

v die wahre Anomalie ist. i, k und p sind konstant, so lange keine störenden Kräfte wirken, R und v sind durch die mittlere Anomalie, d. h. die Zeit

$$M = m\,(t + b)$$

auszudrücken. Dazu dienen die Gleichungen

$$R \cos v = a\,(\cos E - e),\ R \sin v = a\,(1 - e^2) \sin E,$$

wo a die halbe große Axe der Bahn, e deren Excentricität und E die excentrische Anomalie ist. sin E und cos E lassen sich aber auf Grund der Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

mit Anwendung der Lagrange'schen Reihe durch die Zeit ausdrücken.

x, y, z sind lineäre Funktionen von sin E und cos E. Irgend welche Combinationen davon kann ich daher nach den cos und sin der Vielfachen von E entwickeln. Will ich nun dieselben als Funktionen der Zeit darstellen, so brauche ich die Entwicklungen von cos n E und sin n E, wie dieselbe die Lagrange'sche Reihe liefert, nämlich

$$\cos n E = \cos n M - ne \sin n M \sin M - \frac{e^2 n}{1.2} \partial \frac{\sin n M \sin^2 M}{\partial M}$$

$$- \cdots - \frac{e^p n}{1.2 \ldots p} \cdot \frac{\partial^{p-1} \sin n M \sin^p M}{\partial M} - \cdots$$

$$\sin n E = \sin n M + ne \cos n M \sin M + \frac{e^2 n}{1.2} \partial \frac{\cos n M \sin^2 M}{\partial M}$$

$$+ \cdots + \frac{e^p n}{1.2 \ldots p} \cdot \frac{\partial^{p-1} \cos n M \sin^p M}{\partial M} + \cdots -$$

Setze ich diese Werthe der Coordinaten, welche nach den Vielfachen der Zeit fortschreiten, in die Störungsfunktion, so habe ich in dieser Produkte von trigonometrischen Funktionen, deren Argumente Vielfache der Zeit sind. Löse ich diese Produkte in Funktionen der Summen und Differenzen ihrer Argumente auf, so ist die Störungsfunktion nach den sin und cos der Vielfachen der Zeit entwickelt.

Wir kommen zur Behandlung der Störungsgleichungen. Da wir nicht erwarten können dieselben strenge aufzulösen, übrigens auch schon ein Näherungsverfahren durch Entwicklung der Störungsfunktion eingeschlagen haben, so werden wir, wegen der Kleinheit des Faktors der Störungsfunktion, bei der ersten Annäherung die Elemente in der rechten Seite als constant ansehen.

Nach dem Gesagten werden die von der Zeit abhängigen Glieder der Differentialgleichungen für die Elemente die Form haben

$$\sin a t + b,\ \cos a t + b,\ t \cos (a t + b),\ t \sin (a t + b).$$

Die Integration giebt diesen Gliedern also die Nenner a und a^2. Es werden daher diejenigen Glieder am meisten durch die Integration wachsen, bei welchen der Werth von a am kleinsten ist. Zugleich ist aber auch $\frac{2\pi}{a}$ die Periode dieser Glieder und es werden daher diejenigen Glieder durch die Integration am größten, deren Periode groß ist. Es kommen aber in der Störungsfunktion periodische Glieder vor mit dem Argument

$$(h\, n\, n' \pm h_1 \frac{\pi n}{K} \pm h_2\, m)\, t + A,$$

wo h, h_1 h_2 die Werthe 0, 1, 2, . . . haben können, und wo m die Winkelgeschwindigkeit des störenden Gestirns ist. Es kommt nun darauf an, welche Bedeutung die Glieder des Faktors von t haben.

Abstrahiren wir vorläufig von den störenden Kräften, so wissen wir aus der Abhandlung Jakobi's, daß die Rotationsbewegung in zwei periodische Bewegungen zerfällt, die im Allgemeinen untereinander incommensurabel sind. Nämlich um die sich drehende positive x' Axe oder um die entgegengesetzte Richtung macht die Schnittlinie der zur momentanen Drehungsaxe senkrechten Ebene, plan instantané de rotation, mit der invariabeln Ebene Schwingungen, je nachdem $2\ t_1\ B <$ oder $> \varrho^2$ ist. Die Projektion der momentanen Drehungsaxe aber macht ähnliche Schwingungen um die positive oder negative x' Axe. Dieses sind wahre Schwingungen und ihre Periode ist $T = \frac{2\,K}{n}$, welche die Periode der oscillatorischen Rotation genannt wird, während die Periode $\frac{2\,\pi}{n\,n_1}$ den Namen der progressiven Rotation führt.

Wenn der plan instantané de rotation nur wenig abweicht von der invariabeln Ebene, so ist $\frac{2\,\pi}{n\,n'}$ nahezu die mittlere Zeit, in welcher sich der Körper einmal um seine Axe dreht, d. h. der mittlere Tag des rotirenden Gestirns.

Die gegebene Entwickelung der Coordinaten des Schwerpunkts des störenden Gestirns in periodische Funktionen der Zeit gilt aber nur für den Fall, daß keine weiteren Kräfte wirken. Dieses ist in der Natur aber nicht der Fall. Eine Folge davon ist, daß die vorkommenden Constanten Variationen erleiden, die man berücksichtigen müßte. Diese Berücksichtigung würde auch beim allgemeinen Problem nicht gerade schwierig sein, aber sehr zusammengesetzte Ausdrücke liefern. Ich werde mich daher im Folgenden auf das specielle Problem der Rotation der Erde beschränken.

II.

Die Rotation der Erde unter dem Einfluß von Sonne und Mond.

Im Folgenden werde ich mich besonders auf die Arbeiten Prisson's über diesen Gegenstand beziehen. Unter diesen sind zuerst die beiden Abhandlungen über die Variation der Constanten zu nennen, die er 1809 und 1816 der Pariser Akademie vorlegte. Diese beiden Arbeiten, so wie die 157 Seiten füllende Arbeit „Sur la rotation“ von 1834 behandeln mehr das allgemeine Rotationsproblem, doch behandelt Prisson in der letztern auch das Problem der Rotation der Erde unter dem Einfluß der Sonne, und findet den von dieser herrührenden Theil der Präcession und Nutation. Wichtiger sind für unser Problem die Abhandlungen „Sur le mouvement de rotation de la terre“ im Journal de l'école polyt. cah. XV. und „Sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité“ im Theil VII. der Memoiren der Akademie 1827.

Die wichtigsten Kräfte, welche störend auf die Rotation der Erde wirken, rühren von Sonne und Mond her. Doch sind dieselben sehr klein: denn wir wissen, wenn wir zuerst die von der

Sonne herrührende Kraft allein betrachten, daß dieselbe proportional mit der Masse L und umgekehrt proportional mit a^3 ist, wo a die halbe große Axe der Bahn ist. Nach der Theorie der Planetenbewegung ist aber $g : a^3 = m^2$, wo g constant und m die Wickelgeschwindigkeit der Erde um die Sonne ist. Nehmen wir aber als Zeiteinheit den mittleren Tag der Erde, so wird $m^2 < \left(\frac{1}{365}\right)^2$ werden. Die analoge Größe beim Monde ist ungefähr noch dreimal so groß. Es sind also in den Differentialgleichungen des gestörten Problems alle Größen der rechten Seiten sehr klein oder vielmehr unmerklich. Dagegen können dieselben durch die Integration so kleine Nenner bekommen, daß sie merklich werden.

Die Thatsache, auf welche Poisson seine ganze Betrachtung basirt, ist die, daß die genauesten astronomischen Beobachtungen keine Verrückung der Pole auf der Erdoberfläche bemerkbar gemacht haben innerhalb eines Tages oder mehrerer Jahre. Würden nämlich innerhalb dieser Zeit die Pole auf der Erdoberfläche verrücken, so würde daraus eine Variation der Polhöhe ein und desselben Orts innerhalb dieser Zeit folgen. Da eine solche nicht beobachtet ist, so kann man schließen, daß dieselbe wenigstens von der Ordnung der Beobachtungsfehler ist.

Die einzige Annahme, die wir nun machen wollen, ist die, daß ohne Einfluß der störenden Kräfte eine Variation der Pole ebensowenig stattfände. Dieses ist eigentlich keine Annahme; denn da die störenden Kräfte klein sind, so rührt ja die Hauptbewegung nicht von ihnen her, sondern vom Anfangsstoß.

Wenn aber die momentane Drehungsaxe im Körper eine feste Lage hat, so erforrert die Stabilität der Bewegung, daß sie entweder mit der Axe des größten oder des kleinsten Trägheitsmoments zusammenfällt. Bei der Erde ist diese Axe die des größten Trägheitsmoments, nach dem Frühern aber die z_1 Axe. Es ist also

$$C > B > A,$$

die früher genannten 6 Differenzen sind sämmtlich negativ und es gilt hier das untere Vorzeichen. Ich werde die Differenzen so schreiben, daß sie positiv sind.

Die drei cos der Winkel, welche die momentane Drehungsaxe mit den Hauptaxen bildet, sind

$$\frac{p}{\omega},\ \frac{q}{\omega},\ \frac{r}{\omega} \text{ wo } \omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

ist. Es sei Δ der Winkel zwischen der momentanen Drehungsaxe und der z_1 Axe, so ist

$$\cos \Delta = \frac{r}{\omega}, \sin \Delta = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Dieser Winkel, also auch sein sin, muß schon beim ungestörten Problem sehr klein sein. Ich nehme seine Größe als eine Größe erster Ordnung an; dann müssen $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ von derselben Ordnung sein. Es ist aber nach Jakobi

$$p = -\sqrt{\frac{2\, t_1\, C - \varrho^2}{A\,(C-A)}}\cdot \text{cu} = -\sqrt{\frac{2\, C\, t_1 - \varrho^2}{A\,(C-A)}}\cdot \frac{4\pi\sqrt{q}}{2\,k\,K}\left[\frac{\cos x}{1+q} + \frac{q}{1+q^3}\cos 3x + \cdots\right]$$

$$q = +\sqrt{\frac{2\, t_1\, C - \varrho^2}{B\,(C-B)}}\cdot \text{su} = \sqrt{\frac{2\, C\, t_1 - \varrho^2}{B\,(C-B)}}\cdot \frac{4\pi\sqrt{q}}{2\,k\,K}\left[\frac{\sin x}{1-q} + \frac{q}{1-q^3}\sin 3x + \cdots\right]$$

$$r = -\sqrt{\frac{\varrho^2 - 2\, t_1\, A}{C\,(C-A)}}\cdot \Delta\text{u} = -\sqrt{\frac{\varrho^2 - 2\, t_1\, A}{C\,(C-A)}}\cdot \frac{\pi}{2\,K}\left[1 + \frac{4\,q}{1+q^2}\cos 2x + \cdots\right].$$

Entwickle ich noch Potenzen von q und berücksichtige nur die erste Potenz, so wird:

$$p = -\sqrt{\frac{2\ t_1\ C - \varrho^2}{A\ (C-A)}}\left[\cos x - q\ (\cos x - \cos 3\ x) + \cdots\right]$$

$$q = +\sqrt{\frac{2\ t_1\ C - \varrho^2}{B\ (C-B)}}\left[\sin x + q\ (\sin x + \sin 3\ x) + \cdots\right]$$

$$r = -\sqrt{\frac{\varrho^2 - 2\ t_1\ A}{C\ (C-A)}}\left[1 - 4\ q + 4\ q\ \cos 2\ x + \cdots\right]$$

Es ist aber

$$q = e^{\frac{-\pi K^1}{K}} = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32} + \cdots$$

also proportional mit k^2. Wir können aber zeigen, daß k von der ersten Ordnung ist. Dann folgt, nach Weglassung der Glieder mit q,

$$\frac{p}{r} = \sqrt{\left[\frac{(2\ C\ t_1 - \varrho^2)\ C}{(\varrho^2 - 2\ A\ t_1)\ A}\right]} \cos x$$

$$\frac{q}{r} = -\sqrt{\left[\frac{(2\ C\ t_1 - \varrho^2)\ C\ (C-A)}{(\varrho^2 - 2\ B\ t_1)\ B\ (C-B)}\right]} \sin x$$

von der ersten Ordnung. Damit dieses geschieht, muß

$$\sqrt{\frac{2\ C\ t_1 - \varrho^2}{\varrho^2 - 2\ t_1\ A}}$$

sehr klein sein. Da

$$k = \sqrt{\frac{2\ C\ t_1 - \varrho^2}{\varrho^2 - 2\ A\ t_1}} \cdot \sqrt{\frac{B-A}{C-A}}$$

diese Größe zum Faktor hat, muß es von derselben Ordnung sein.

Bei der Erde ist A nahezu gleich B; es trägt also hier der zweite Faktor auch bei, k klein zu machen. Die Glieder mit dem Faktor q in p und q sind daher von der dritten Ordnung.

Gehen wir zum gestörten Problem über. Da, in den Differentialgleichungen für die Elemente die Glieder der rechten Seite sehr klein sind, und dieselben nur durch die Integration so kleine Nenner bekommen können, daß sie merklich werden, so ist es wichtig, aus der Störungsfunktion sofort die Glieder auszuschließen, bei denen dieses nicht der Fall sein kann. Aus der allgemeinen Theorie wissen wir, daß dieses zugleich die Glieder sind, deren Periode klein ist, z. B. ein Tag.

Wenn aber die momentane Drehungsaxe nahezu mit der Axe z_1 zusammenfällt, so gilt auch, wie oben bemerkt, daß $\frac{2\ \pi}{n\ n}$, nahezu der mittlere Tag der Erde ist. Die andere Periode welche vorkommt ist

$$2\ T = 2\ \pi : \frac{n\ \pi}{2\ K} = \frac{4\ K}{n}.$$

Von dieser werde ich weiter unten zeigen, daß sie etwa um $\frac{1}{7}$ kleiner als ein Jahr ist oder als $\frac{2\ \pi}{m}$. Es ist also $n\ n'$ gegen $\frac{n\ \pi}{2\ K}$ groß; ebenso ist es, wenn sich m auf den Mond be-

zieht. Es wird also nach dem Früheren die Periode der Glieder mit dem Argument

$$\left(h\, n\, n' + h_1 \frac{\pi\, n}{K} + h_2\, m\right) t + A$$

durch $\frac{2\,\pi}{n\,n'}$ bestimmt, woraus folgt, daß dieselbe der hten Theil eines Tages ist. Diese Glieder wachsen nicht durch die Integration und sind also zu vernachlässigen. Lasse ich dieselben in der Störungsfunktion fort, so bleibt

$$\Omega = -\frac{3\,L}{4\,\delta^5}\Big\{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-2\,\mathfrak{z}^2)\Big[(C-B)\frac{\varrho^2-2\,t_1\,A}{\varrho^2}\Big(Z'\,(o) - Z'\,(u)\Big) + \frac{A\,(2\,t_1\,C-\varrho^2)}{\varrho^2}\Big]$$
$$-(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)\,(2\,C-A-B)\Big\}$$

Dieser Ausdruck bezieht sich nur auf das eine der störenden Gestirne. Für das zweite gilt ein analoger Ausdruck, den wir erhalten, wenn wir in Ω für

$L,\ \delta,\ \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$ setzen $L',\ \delta',\ \mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}',\ \mathfrak{z}'$.

In den Werthen von p, q, r kommen nur die Elemente t_1, ϱ, b vor. Für diese gelten aber die Differentialgleichungen

$$\frac{d\,t_1}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,b} \quad \frac{d\,b}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,t_1} \quad \frac{\partial\,\varrho}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\beta}.$$

Die letzte Gleichung liefert keine Glieder, deren Periode länger als ein Tag ist. Denn es ist, wie aus der Bedeutung von $\mathfrak{z}$ folgt,

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \delta^2 - \mathfrak{z}^2,$$

und $\mathfrak{z}$ ist unabhängig von β. Dagegen giebt

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{3}{4}\,L\left(\frac{1}{\delta\,3} - \frac{3\,\mathfrak{z}^2}{\delta\,5}\right) Z''\,(u)\cdot n\,(C-B)\,\frac{\varrho^2-2t_1\,A}{\varrho^2}.$$

Es ist aber

$$Z\,(u) = \frac{\pi}{2\,K}\cdot 4\sum_1^\infty \frac{q^{\,h}}{1-q^{\,2\,h}}\sin\frac{h\,\pi\,u}{K}$$

$$Z'\,(u) = \left(\frac{\pi}{2\,K}\right)^2 8\sum_1^\infty \frac{h\,q^{\,h}}{1-q^{\,2\,h}}\cos\frac{h\,\pi\,u}{K}$$

$$Z''\,(u) = -\left(\frac{\pi}{2\,K}\right)^3 16\sum_1^\infty \frac{h^2\,q^{\,h}}{1-q^{\,2\,h}}\sin\frac{h\,\pi\,u}{K}.$$

$$\frac{d\,b}{dt} = -\frac{3}{4}\,\frac{L}{\delta^5}\,(\delta^2-3\,\mathfrak{z}^2)\Big\{Z'\,(o)\;2\,\frac{A\,(C-B)}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2-2t_1\,A}{\varrho^2}\,(C-B)\,\frac{\partial\,Z'\,(o)}{\partial t_1}$$
$$+\frac{2\,A\,C}{\varrho^2} - \frac{\varrho^2-2t_1\,A}{\varrho^2}\,A\,(C-B)\,\frac{\partial\,Z'\,(u)}{\partial t_1} - 2\,\frac{A\,(C-B)}{\varrho^2}\,Z'\,(u)\Big\}.$$

Es enthält daher t_1 nur periodische Glieder und b zerfällt in einen der Zeit proportionalen Theil und in periodische Glieder. Entwickle ich bis k^2, so wird

$$Z'\,(u) = \frac{k^2}{2}\cos\frac{\pi\,u}{K}$$

$$Z''\,(u) - k^2\sin\frac{\pi\,u}{K}$$

$$\frac{\partial\ Z'\ (u)}{dt_1} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi u}{K} \frac{\partial k^2}{dt_1} - k^2 \sin \frac{\pi\ u}{K}\ \partial \frac{\frac{\pi}{2\ K}}{\partial\ k^2} \left(n \frac{\partial\ k^2}{dt_1} + \frac{\pi}{2\ K} \frac{\partial\ n}{\partial t_1}\right) (t + b)$$

Führe ich die Differentiationen aus und setze ein, so wird

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{-\ 3\ L}{4} \left(\frac{1}{\delta^3} - \frac{3\ \mathfrak{z}^2}{\delta^5}\right) k^2\ n\ (C-B) \frac{(\varrho^2 - 2t_1\ A)}{\varrho^2} \sin \frac{\pi\ u}{K}$$

$$\frac{d\ b}{dt} = \frac{3\ L}{4} \left(\frac{1}{\delta^3} - \frac{3\ \mathfrak{z}^2}{\delta^5}\right) \left\{\frac{A\ (C-B)}{\varrho^2}\ k^2 + \frac{(B-A)\ (C-B)}{\varrho^2 - Lt_1\ A} + \frac{2\ A\ C}{\varrho^2}\right.$$

$$\left. - \frac{(B-A)\ (B-C)}{\varrho^2 - 2t_1\ A} \cos \frac{\pi u}{K} - k^2 u \left(\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B-A}{2\ (\varrho^2 - 2\ At_1)}\right) \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{(AC-B)}{\varrho^2}\ k^2 \cos \frac{\pi\ u}{K}\right\}.$$

Jetzt ist noch $\frac{1}{\delta^3}$ und $\frac{\mathfrak{z}^2}{\delta^5}$ zu entwickeln. Zunächst ist

$$\mathfrak{z} = \gamma\ x + \gamma_1\ y + \gamma_2\ z$$

wo $\gamma = \sin \alpha \sin \gamma,\ \gamma_1 = \cos \alpha \sin \gamma,\ \gamma_2 = \cos \gamma$ ist.

Für x y z sind die Werthe aus der Planetenbewegung zu setzen. Ich nehme an, es wirke die Sonne allein störend. Als Ebene der Bahn nehme ich die Ekliptik zu irgend einer Epoche und vernachlässige die Abweichung von dieser Bahn. Denn habe ich $i = o$ zu setzen und erhalte

$$z = o,\ x = R \sin (v + p - k),\ y = R \cos (v + p - k),$$

also

$$\mathfrak{z} = R \sin \gamma \sin (v + p - k + \alpha).$$

Endlich nehme ich p, k, α, γ als constant an und vernachlässige die Excentricität der Bahn, dann ist

$$R = a,\ R \cos v = a \cos E,\ R \sin v = a \sin E,\ v = E = m\ (t + b)$$

$$\mathfrak{z} = a \sin \gamma \sin [m\ (t + b) + p - k + \alpha].$$

Ich setze C für $p - k + \alpha + mb$ und habe

$$\mathfrak{z}^2 = a^2 \sin^2 \gamma \sin^2 (mt + C)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin^2 \gamma \left(1 - \cos 2\ (mt + C)\right)$$

$$\frac{1}{\delta^3} - \frac{3\ \mathfrak{z}^2}{\delta^5} = \frac{1}{a^3} \left\{1 - \frac{3}{2} \sin \gamma^2 + \frac{3}{2} \sin^2 \gamma \cos 2\ (mt + C)\right\},\ \frac{L}{a^3} = m^2$$

Diesen Werth haben wir in die Differentialgleichungen zu setzen und nach den cos und sin der Vielfachen der Zeit zu entwickeln. Die erste Gleichung enthält nur periodische Glieder. Die zweite Gleichung giebt ein konstantes Glied und ebenfalls periodische Glieder, doch haben einige dieser Glieder noch t zum Faktor. Am meisten können die Glieder, welche die Form

$$t \cos (\alpha t + \beta)$$

haben, durch die Integration wachsen, denn dieselben bekommen dadurch ja den Nenner α^2. Es kommen aber nur die Perioden

$$\frac{\pi}{m},\ \frac{2K}{n} \text{ und } \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{K} \pm 2\ m}$$

vor. Wie gezeigt ist, können diese Perioden aber nicht groß, also die Nenner, welche durch die

Integration entstehen, nicht klein sein. Außerdem haben diese Glieder ja noch den Faktor k^2, der beiträgt, dieselben klein zu machen. Lasse ich diese Glieder mit diesen Perioden weg, so bleibt:

$$\frac{dt_1}{dt} = o \quad \frac{db}{dt} = - c$$

wo
$$c = \frac{3}{4}\, m^2 \left(\frac{2\,A\,C}{\varrho^2} + \frac{(B-A)\,(C-B)}{\varrho^2 - 2t_1\,A}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)$$

gesetzt ist und auch die periodischen Glieder in dem Ausdruck für b nicht hingeschrieben sind, die zwar die genannten Perioden, aber nicht den Faktor k^2, wohl aber den Faktor m^2 haben. Ich werde von diesen Gliedern zeigen, daß sie nicht in Betracht kommen. Die Integration giebt

$$t_1 = t_1, \quad b = b - ct,$$

wo also in b die periodischen Glieder, die wenigstens den Faktor m haben, fehlen. Unter den Werthen t_1 und b der rechten Seiten verstehe ich sämmtliche konstanten Glieder, also auch diejenigen, welche entstehen, wenn ich für t seine untere Grenze nach der Integration setze.

Mit diesen verbesserten Werthen gehe ich in p, q, r hinein. t_1 kommt nur als Argument von Kreisfunktionen vor in der Verbindung $\pi\, n\, (t + b) : K$. Setze dafür den verbesserten Werth $\left(\frac{\pi\, n}{K} - c\right) + \frac{\pi\, n\, b}{K}$, den ich w nenne, so wird

$$q = \sqrt{\left(\frac{2\,Ct_1 - \varrho^2}{A\,(C-A)}\right)}\sin w, \quad q = \sqrt{\left(\frac{2\,Ct_1 - \varrho^2}{B\,(C-B)}\right)}\cos w, \quad r = -\sqrt{\left(\frac{\varrho^2 - 2t_1\,A}{C\,(C-A)}\right)}.$$

Hätten wir in b nicht die periodischen Glieder, deren Faktor m ist, weggelassen und wäre

$$b = b - ct + d\sin(ft + g),$$

wo das letzte Glied alle periodischen Glieder repräsentiren soll, so hätten wir gehabt

$$w_1 = w + \frac{d\,\pi\, n}{K}\sin(ft + g).$$

Hätten wir nun sin w_1 nach Potenzen des letzten Gliedes entwickelt und wären nur bis zur ersten Potenz gegangen, so hätte dieses Glied den Faktor m gehabt. Nun ist aber der Faktor von sin w_1 in q eine Größe erster Ordnung, folglich das Produkt von m mit demselben verschwindend klein.

Nenne ich den Winkel, den die momentane Drehungsaxe mit z_1 macht Δ, so folgt aus diesen Werthen von p, q, r

$$\sin\Delta = \sqrt{\frac{(2\,Ct_1 - \varrho^2)\,C}{(\varrho^2 - 2t_1\,A)\,A}}\sqrt{\left(\cos^2 w + \frac{A\,(C-A)}{B\,(C-B)}\sin^2 w\right)}.$$

Dieses Δ stellt den Radius-Vektor derjenigen kleinen Kurve dar, welche die momentane Drehungsaxe auf der Erdoberfläche beschreibt, wenn man den Radius der Erde als Einheit annimmt. Die Zeit, während welcher diese Kurve beschrieben wird, hängt von der Periode von p, q, r ab und ist daher etwas geringer als ein Jahr. Dieser kleinen Kurve würde, während der angegebnen Zeit eine Variation der geographischen Breite gleich 2 Δ entsprechen. Eine solche Variation ist nicht beobachtet worden, woraus man schließen muß, das 2 Δ wenigstens von der Ordnung der Beobachtungsfehler ist. (Vergl. Mém. de l'Acad. VII. p. 238).

Beständigkeit des Sternentages. Der Sternentag ist die Zeit, innerhalb welcher sich das Integral

$$\int V \; (p^2 + q^2 + r^2) \; dt$$

um $2\,\pi$ ändert. Nun ist aber

$$\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} = r \left(1 + \frac{p^2 + q^2}{2\,r^2} + \cdots\right).$$

Hierein setze ich die verbesserten Werthe und gehe bis zu den Größen zweiter Ordnung, so wird der Ausdruck

$$= \sqrt{\frac{\varrho^2 - 2\,t_1\,A}{C\,(C-A)}} \left[1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} \cos 2\,w + \frac{(2\,t_1\,C-A)\,C}{2(\varrho^2-2t_1A)A} \left(\cos^2 w + \frac{A\,(C-A)}{B\,(C-B)} \sin^2 w\right)\right].$$

Mit diesem Ausdruck ist eine zweite Integration vorzunehmen. Diese könnte unter den periodischen Gliedern, die aber als Faktoren Größen zweiter Ordnung haben, Nenner hervorbringen, die so klein sind, daß die Glieder merklich werden. Die Perioden dieser Terme müßten dann aber sehr groß sein; da solche Perioden nicht hier vorkommen, so bleiben auch die periodischen Glieder nach der Integration unmerklich. Daraus folgt dann unmittelbar, daß der Sternentag constant ist und den Werth $2\,\pi : \sqrt{\frac{(\varrho^2 - 2\,t_1\,A)}{C\,(C-A)}}$ hat.

Hieraus können wir einen Schluß in Bezug auf die Größe der Periode von p, q, r machen, d. h. auf

$$2\,\pi : \frac{n\,\pi}{2\,K} = \frac{2\,\pi}{n} = 2\,\pi \sqrt{\frac{A\;B\;C}{(C-A)\;(\varrho^2 - 2\,t_1\;A)}},$$

wo $\frac{\pi}{2\,K} = 1$ gesetzt ist. Nehmen wir nämlich den Sternentag als Einheit an, setzen also seinen Werth gleich 1, so wird die genannte Periode

$$\sqrt{\frac{A\;B\;C}{(C-A)\;(C-B)}} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{C-A},$$

wenn $B = A$ gesetzt wird. Poisson findet nun aber aus der beobachteten Präcession, daß

$$\frac{C-A}{A} = 0{,}0032667$$

ist, woraus für den umgekehrten Werth 306 Tage oder etwa $^6/_7$ Jahre folgen. (Vergl. Mém. de l'Acad. VII. 263).

Präcession und Nutation. (Vergl. Mém. de l'Acad. VII.) Wenn keine Verrückung der Pole auf der Erdoberfläche stattfindet, so fällt die Ebene des Aequators strenge mit der Ebene der Maxima der Flächenräume zusammen. Die Neigung der beiden Ebenen Θ ist also Null; es fällt also auch der Winkel ϑ mit dem Winkel γ ebenso genau zusammen. Da aber ferner aus dem früher betrachteten sphärischen Dreieck folgt, daß

$$\sin\Theta\,\sin\,(\Phi - \varphi) = \sin\gamma\,\sin\,(\psi - \alpha)$$
$$\sin\Theta\,\cos\,(\Phi - \varphi) = \cos\gamma\,\sin\vartheta - \sin\gamma\,\cos\vartheta\,\cos\,(\psi - \alpha)$$

ist, so sieht man, daß $\psi = \alpha$ ist. Nun ist aber $\psi - \alpha$ der von der niedersteigenden Knotenlinie der $x_1\;y_1$ Ebene bis zur niedersteigenden Knotenlinie der $\mathfrak{x}\;\mathfrak{y}$ Ebene auf der x y Ebene direkt gezählte Winkel. Es fallen also die genannten Knotenlinien zusammen. Daraus folgt, daß

die Variationen, welchen α und γ unterworfen sind, gleichzeitig die verbesserten Werthe von ψ und ϑ geben. Für dieselben gelten die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} \frac{1}{\varrho \sin \gamma}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \frac{1}{\varrho \sin \gamma} + \frac{\cos\gamma}{\varrho \sin \gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$$

Dazu füge ich noch die letzte der Störungsgleichungen hinzu, welche mit Benutzung derjenigen für α übergeht in

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \cos \gamma - \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}.$$

In der zweiten Gleichung lasse ich das zweite Glied weg, da dieses nur Glieder mit täglichen Perioden enthält, die ja durch die Integration nicht wachsen und daher unmerklich bleiben. Von Ω brauchen wir nur den Seite 19 angegebenen Theil zu berücksichtigen. Bei der Bildung der Differentialquotienten nach γ und α können wir aber noch das ganze erste Glied weglassen. Denn Z′ (o) und Z′ (u) sind auch nach der Integration unmerklich, weil sie den Faktor k^2 haben und

$$A \frac{(2t_1 \; C - \varrho^2)}{\varrho^2} = p^2 \frac{A}{B} \frac{C - B}{\varrho^2}$$

ist von der zweiten Ordnung, da es den Faktor p^2 hat. Setzen wir noch

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \delta^2 - \mathfrak{z}^2$$

und lassen das Glied mit δ^2, das ja unabhängig von α und γ ist, weg, so bleibt

$$\Omega = -\frac{3}{4} \frac{L}{\delta^5} \mathfrak{z}^2 (2\, C - A - B).$$

Es bleibt jetzt noch $\mathfrak{z}^2 : \delta^5$ nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen der Zeit zu entwickeln. Es ist aber, auf das im Raume feste Coordinatensystem bezogen

$$\mathfrak{z} = \gamma\, x + \gamma_1\, y + \gamma_2\, z$$

$$\text{wo } \gamma = \sin \gamma \sin \alpha, \quad \gamma_1 = \sin \gamma \cos \alpha, \quad \gamma_2 = \cos \gamma.$$

Setze ich für x, y, z die früher gegebenen Werthe, wie sie aus der Theorie der Planetenbewegung folgen, so wird

$$\frac{\mathfrak{z}}{R} = \sin \gamma \sin \alpha \sin i \sin (v + p) + \sin \gamma \cos \alpha \cos i \sin (v + p)$$
$$- \sin \gamma \cos \alpha \sin k \cos (v + p) + \cos \gamma \cos i \sin k \sin (v + p) + \cos \gamma \cos k \cos (v + p)$$

Entwickeln wir dieses nach cos v und sin v, und entwickeln wir cos i und sin i nach Potenzen von i, wo i, sowohl beim Mond als auch bei der Sonne so klein ist, daß wir nur die zweiten Potenzen von i zu rücksichtigen brauchen, wenn nämlich die Ebene der Ekliptik zu irgend einer Zeit als feste Ebene angesehen wird, so wird

$$\frac{\mathfrak{z}}{R} = \cos v \left[(\sin \gamma \sin \alpha - k + p) + i \cos \gamma \sin p - \frac{i^2}{2} \sin p \cos (\alpha - k) \sin \gamma \right]$$
$$+ \sin v \left[\sin \gamma \cos (\alpha - k + p) + i \cos \gamma \cos p - \frac{i^2}{2} \cos p \cos (\alpha - k) \sin \gamma \right]$$

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{R^2} = \cos^2 v \Big[\sin^2\gamma \sin^2(\alpha - k + p) + 2\, i \sin\gamma \cos\gamma \sin p \sin(\alpha - k + p)$$

$$+ i^2 \cos^2\gamma \sin^2 p - i^2 \sin^2\gamma \sin p \sin(\alpha - k + p)\cos(\alpha - k)\Big]$$

$$+ \sin^2 v \Big[\sin^2\gamma \cos^2(\alpha - k + p) + 2\, i \sin\gamma \cos\gamma \cos p \cos(\alpha - k + p)$$

$$+ i^2 \cos^2\gamma \cos^2 p - i^2 \sin^2\gamma \cos p \cos(\alpha - k + p)\cos(\alpha - k)\Big]$$

$$+ 2 \sin v \cos v \Big[\frac{1}{2}\sin^2\gamma \sin 2(\alpha - k + p) + i \cos\gamma \sin\gamma \sin(\alpha - k + 2p)$$

$$+ \frac{i^2}{2}\cos^2\gamma \sin 2p - \frac{i^2}{2}\sin^2\gamma \cos(\alpha - k)\sin(\alpha - k + 2p)\Big]$$

Jetzt kommt es darauf an $R^2 \cos^2 v$, $R^2 \sin^2 v$ und $R^2 \sin v \cos v$ nach sin und cos der vielfachen der excentrischen Anomalie E zu entwickeln. Nun sind aber diese Glieder noch durch δ^5 oder was dasselbe ist durch R^5 in der Störungsfunktion dividirt. Wir entwickeln daher auch diese Quotienten. Wir hatten aber

$$R\frac{\cos v}{a} = \cos E - e,\quad \frac{R \sin v}{a} = \sqrt{(1 - e^2)}\sin E,\quad \frac{R}{a} = 1 - e\cos E.$$

Gehen wir in der Entwicklung nur bis zur zweiten Potenz der Excentricität, so wird

$$\frac{R^2}{a^2}\cos^2 v = 1 + e^2 - 2\, e\cos E + \frac{1}{2}\cos 2E$$

$$\frac{R^2}{a^2}\sin^2 v = \frac{1 - e^2}{2} - \frac{e}{2}\cos 2E$$

$$\frac{R^2}{a^2}\sin v \cos v = -e\sin E + \frac{1}{2}\sin 2E - \frac{e^2}{4}\sin 2E$$

$$\frac{a^5}{R^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2 + 5\, e\cos E + \frac{15}{2}e^2\cos 2E.$$

Daraus folgt:

$$\frac{a^5}{R^5}\frac{R^2}{a^2}\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{13}{8}e^2 + \frac{7}{4}e\cos E + \frac{1 + 5e^2}{2}\cos 2E + \frac{5}{4}e\cos 3E + \frac{15}{8}e^2\cos 4E$$

$$\frac{a^5}{R^5}\frac{R^2}{a^2}\sin^2 v = \frac{1}{2} + \frac{11}{8}e^2 + \frac{5}{4}e\cos E - \frac{1 - e^2}{2}\cos 2E - \frac{5}{4}e\cos 3E - \frac{15}{8}e^2\cos 4E$$

$$\frac{a^5}{R^5}\frac{R^2}{a^2}\sin \cos v = e\sin E + \frac{1 + 2e^2}{2}\sin 2E + \frac{5}{4}e\sin 3E + \frac{15}{8}e^2\sin 4E.$$

Um jetzt diese sin h E und cos h E durch die mittlere Anomalie M auszudrücken, habe ich die Gleichung

$$M = E - e\sin E.$$

Nach der angegebenen Lagrange'schen Umkehrungsformel entwickle ich cos h E und sin h E. Nun haben aber in unserer Entwicklung cos E, cos 3 E, sin 3 E den Faktor e, cos 4 E den Faktor e^2. Gehen wir nur bis zur zweiten Potenz von e, so ist zu setzen

$$\sin E = \sin M + \frac{e}{2}\sin 2M$$

$$\cos E = \cos M - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \cos 2 M$$

$$\sin 2 E = - e \sin M + (1-e^2) \sin 2 M + e \sin 3 M + e^2 \sin 4 M$$

$$\cos 2 E = - e \cos M + (1-e^2) \cos 2 M + e \cos 3 M + e^2 \cos 4 M$$

$$\sin 3 E = - \frac{3}{2} e \sin 2 M + \sin 3 M + \frac{3}{2} e \sin 4 M$$

$$\cos 3 E = - \frac{3}{2} e \cos 2 M + \cos 3 M + \frac{3}{2} e \cos 4 M$$

$$\sin 4 E = \sin 4 M$$

$$\cos 4 E = \cos 4 M.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a^5}{R^5} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{5}{4} e \cos M + \frac{1+e^2}{2} \cos 2 M + \frac{9}{4} e \cos 3 M + \frac{17}{4} e^2 \cos 4 M$$

$$\frac{a^5}{R^5} \cdot \frac{R^2}{a^2} \sin^2 v = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{7}{4} e \cos M - \frac{1-7e^2}{2} \cos 2 M - \frac{7}{4} e \cos 3 M - \frac{17}{4} e^2 \cos 4 M$$

$$\frac{2 a^5}{R^5} \frac{R^2}{a^2} \sin v \cos v = e \sin M + \left(1 - \frac{7}{4} e^2\right) \sin 2 M + \frac{7}{2} e \sin 3 M + \frac{17}{2} e^2 \sin 4 M.$$

In den Integralen, die aus den Störungsgleichungen für α und γ folgen, werden die nicht periodischen Glieder am merklichsten sein. In den periodischen Gliedern kann ich daher weniger genau sein. Ich will daher in den Coefficienten derselben bereits die von e und i abhängigen Glieder vernachlässigen. Dann habe ich zu setzen

$$\frac{a^5}{R^5} \frac{R^2}{a^2} \cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{2} \cos 2 M$$

$$\frac{a^5}{R^5} \frac{R^2}{a^2} \sin^2 v = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{2} \cos 2 M$$

$$\frac{a^5}{R^5} \frac{R^2}{a^2} \sin v \cos v = \frac{1}{2} \sin 2 M,$$

und erhalte

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{R^5} = \frac{1 + \frac{3}{2} e^2}{a^3} \Big\{\sin^2 \gamma + 2 i \sin \gamma \cos \gamma \cos (\alpha-k) + i^2 \cos^2 \gamma$$
$$- \cos 2 (\alpha-k + p + M) \sin^2 \gamma - \frac{i^2}{2} \sin^2 \gamma [1 + \cos 2 (\alpha-k)]\Big\}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a^3}{R^5} \frac{\partial \mathfrak{z}^2}{\partial \gamma} = \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \Big[\sin \gamma \cos \gamma + i \cos 2 \gamma \cos (\alpha-k) +$$
$$- \sin \gamma \cos \gamma \cos 2 (\alpha-k + p + M) - \frac{i^2}{2} \sin\gamma \cos\gamma [3 + \cos 2 (\alpha-k)]\Big]$$

$$\frac{a^3}{R^5} \frac{\partial \mathfrak{z}^2}{\partial \alpha} = - \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) [i \sin \gamma \cos \gamma \sin (\alpha-k) + i^2 \sin \gamma^2 \sin 2 (\alpha-k)$$
$$+ \sin^2 \gamma \sin 2 (\alpha-k + p + M)].$$

Diese Ausdrücke beziehen sich auf ein störendes Gestirn; es sei dasselbe der Mond. Für die Sonne erhalten wir ganz entsprechende Ausdrücke, wenn wir die den Größen M, e, k, i und p analogen Größen mit M′, e′, k′, i′ und p′ bezeichnen. Bei der Sonne ist aber die Neigung der beweglichen Ekliptik zu der als fest angenommenen so klein, daß wir schon ihr Quadrat vernachlässigen können.

In unserm Ausdruck sind aber e, i, k und p ebenso wie die gestrichenen Größen nicht constant, sondern Funktionen der Zeit: denn die Werthe von x y z sind unter der Annahme gefunden, daß auf den Mond allein die anziehende Kraft der Erde wirke, und auf die Erde allein die der Sonne. Der Mond wird aber durch die Sonne gestört und die Erde durch den Mond.

Daraus entspringen bei Mond und Sonne Variationen der Bahnelemente. Von diesen sagt Poisson, daß bei dem Monde e konstant sei und daß sich die Länge des aufsteigenden Knotens seiner Bahn α—k langsam ändere, so daß man setzen kann

$$\alpha - k = \beta + \beta_1 t.$$

Diese Resultate hat Poisson aus der Mécanique céleste entnommen. In einer spätern Arbeit über die Bewegung des Mondes um die Erde (Mém. de l'Acad. XIII. 1834) gelangt er zu demselben Resultate wie Laplace. Da ferner, wie sich aus den Beobachtungen ergiebt, die Neigung der Mondbahn zur beweglichen Ekliptik fast constant ist, so führt Poisson diese Größe c für i ein mittelst der Gleichungen

$$i \sin(\alpha - k) = c \sin(\alpha - k) + i' \sin(\alpha - k')$$
$$i \cos(\alpha - k) = c \cos(\alpha - k) + i' \cos(\alpha - k'),$$

welche bis auf Größen der dritten Ordnung richtig sind und worin

$$\alpha - k = \beta + \beta_1 t$$

zu setzen ist.

Bei der Sonne ändern sich die Größen e′, $i' \sin(\alpha - k')$, $i' \cos(\alpha - k')$ so langsam, daß wir sie uns nach den Potenzen der Zeit entwickelt denken und uns mit der ersten Potenz begnügen können, so daß also

$$e' = e'_1 + f'_1 t, \quad i' \sin(\alpha - k') = g' t, \quad i' \cos(\alpha - k') = g'_1 t$$

ist. In den beiden letzten Gliedern habe ich das konstante Glied weggelassen und damit angenommen, daß zur Zeit t = o die bewegliche Ekliptik mit der als fest angenommenen zusammenfällt.

Diese Werthe habe ich in

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial(\Omega + \Omega')}{\partial \gamma} \frac{1}{\varrho \sin\gamma}$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial(\Omega + \Omega')}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{\varrho \sin\gamma}$$

zu setzen, wo Ω' sich auf die Sonne bezieht. Es ist aber

$$\Omega + \Omega' = -\frac{3}{4}(2C - A - B)\left(\frac{L\,\mathfrak{z}^2}{\delta^5} + \frac{L'\,\mathfrak{z}'^2}{\delta'^5}\right)$$

und $\frac{\mathfrak{z}^2}{\delta^5}$ hat den Faktor $\frac{1}{a^3}$, dagegen das zweite Glied den Faktor $\frac{1}{a'^3}$. Es ist aber

$$\frac{L'}{a'^3} = m'^2, \quad \frac{L}{a^3} = m^2$$

d. h. der letzte Ausdruck gleich dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit des Mondes um die Erde. Setze ich

$$\frac{m^2}{m'^2} = \omega$$

so ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3\, m'^2}{4} \frac{2\; C-A-B}{\varrho \sin\gamma} \left(\frac{\partial\, \mathfrak{z}'^2}{d\,\gamma} \frac{a'^3}{\delta'^5} + \omega \frac{\partial\, \mathfrak{z}^2}{\partial\gamma} \frac{a^3}{\delta^5}\right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{3\, m'^2}{4} \frac{2\; C-A-B}{\varrho \sin\gamma} \left(\frac{\partial\, \mathfrak{z}'^2}{\partial\,\alpha} \frac{a'^3}{\delta'^5} + \omega \frac{\partial\, \mathfrak{z}^2}{\partial\alpha} \frac{a^3}{\delta^5}\right).$$

Setze ich

$$\frac{3}{4} m'^2 \frac{2\; C-A-B}{\varrho} \cos\gamma = \varphi$$

so folgt:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varphi \left[\left(1 + \omega + \frac{3}{2} e'^2_1 + \frac{3}{2} e^2\omega - \frac{3}{2} c^2\omega\right) + (3\, e'_1 f'_1 + 2\,\omega\, g'_1 \operatorname{cotg} 2\gamma)\, t \right.$$
$$+ 2\, c\, \omega \operatorname{cotg} 2\gamma \cos(\beta + \beta_1 t) - \frac{c^2}{2}\omega \cos 2(\beta + \beta_1 t)$$
$$\left. - \omega \cos 2(M + \alpha - k + p) - \cos 2(M' + \alpha - k' + p')\right]$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \varphi\, [(1 + \omega)\, g'\, t + \omega\, c \sin(\beta + \beta_1 t) - \omega\, c^2 \operatorname{tg}\gamma \sin 2(\beta + \beta_1 t)$$
$$- \operatorname{tg}\gamma \sin 2(M' + \alpha - k' + p') - \omega \operatorname{tg}\gamma \sin 2(M + \alpha - k + p)]$$

Die Integration giebt

$$\alpha = \alpha_1 + \varphi\left(1 + \omega + \frac{3}{2} e'^2_1 + \frac{3}{2} e^2\omega - \frac{3}{2} c^2\omega\right) t + \frac{\varphi}{2}(3 e'_1 f'_1 + 2\omega g'_1 \operatorname{cotg} 2\gamma)\, t^2 + \alpha'$$

$$\gamma = \gamma_1 + \frac{\varphi}{2}(1 + \omega)\, g'\, t^2 + \gamma'.$$

Hierin sollen α_1 und γ_1 die zur Zeit $t = o$ stattfindenden Werthe sein und α' γ' die periodischen Glieder. Setze ich für M und M' die Werthe, nämlich

$$M = m\,t + b, \quad M' = m'\,t + b',$$

so wird

$$\alpha' = \frac{2\,\varphi\, c\,\omega}{\beta_1} \operatorname{cotg} 2\gamma \sin(\beta + \beta_1 t) - \frac{f\, c^2\, \omega}{4\,\beta_1} \sin(2\beta + 2\beta_1 t)$$
$$- \frac{\varphi}{2\, m'} \sin 2(m'\, t + b' + \alpha - k' + p) - \frac{\varphi\,\omega}{2\, m} \sin 2(mt + b + \alpha - k + p)$$

$$\gamma' = -\frac{\varphi\,\omega\, c}{\beta_1} \cos(\beta + \beta_1 t) + \frac{\varphi\,\omega\, c^2}{2\,\beta_1} \operatorname{tang}\gamma \cos 2(\beta + \beta_1 t)$$
$$+ \frac{\varphi}{2\, m'} \operatorname{tang}\gamma \cos 2(m'\, t + b' + \alpha - k' + p')$$
$$+ \frac{\varphi\,\omega}{2\, m} \operatorname{tang}\gamma \cos 2(m\, t + b + \alpha - k + p).$$

Dieses sind dieselben Formeln, welche Poisson gefunden hat, bis auf den Unterschied, daß auf den rechten Seiten in den Formeln für

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$$

im Nenner n C steht, während ich ϱ habe. Dieses ist aber dasselbe: denn bei Poisson ist $n^2 = r^2$, bei uns

$$r^2 = \frac{\varrho^2 - 2 t_1 A}{C (C-A)}.$$

Nimmt man die Relation $p = q = o$ als strenge richtig an, so folgt

$$2 C t_1 - \varrho^2 = o.$$

Drücke ich durch diese Gleichung t_1 durch ϱ^2 aus, so wird

$$n^2 = \frac{\varrho^2}{C^2} \text{ oder } n C = \varrho. —$$

E. Schumann.